

# 前 言

量子光学不仅是光学领域的基础学科，也是当前物理学中发展最活跃的领域之一。现代量子光学是 20 世纪 60 年代诞生、90 年代初趋于成熟的一门学科。

量子理论是探究微观世界粒子运动规律的基础理论，量子光学是一门运用量子理论研究光场的非经典效应，以及光与物质相互作用过程中非经典现象的学科。量子光学用于观测符合量子力学规律复杂多样的物理现象，研究对光子的操纵和相干调控，不仅以其不可或缺的实验方法验证了部分尚存在争议的量子力学的基本原理，促进了量子力学的纵深发展，而且与信息科学交叉融合，将量子光学基本理论与量子操控的独特实验方法应用于信息处理，开拓出极为实用的量子信息新领域，促使量子信息科学的诞生。

量子光学从一门专门研究光和光场量子特性的学科，目前已演变为融合量子通信、量子计算、量子精密测量等量子信息科学，其应用极为广泛，为量子信息科学和技术的发展提供了基础。

目前量子光学可以分为以下两个部分：

第一部分是量子光学的基础理论，也是从事量子光学和量子信息学研究必须掌握的部分，内容包括：光场的量子相干性、统计性以及压缩特性(即光场的量子化、光场本身的量子统计性质、相干性质、光场的压缩特性)，经典光场和量子光场分别与原子相互作用的半经典理论和全量子理论，量子光学中具体的物理实验系统，以及开放量子系统的量子理论等。

第二部分是量子光学前沿(最新发展)。这部分内容广泛且丰富、发展和更新速度快，从曾经很活跃、很前沿的激光半经典理论、共振荧光、超荧光、超辐射以及光学双稳态等，到当前迅猛发展的量子通信、量子计算与量子模拟、量子精密测量、量子关联成像、量子网络、冷原子物理等。

本书着重阐述第一部分内容，对第二部分内容不进行专门介绍，但将其中的重要内容和核心概念，如激光理论、纠缠态制备、纠缠度量、退相干、边带冷却等穿插融入其中进行介绍。这是因为从事量子信息科学等专业的学生还有更加具体和深入的专业课、专题课及前沿讲座对第二部分内容进行专门讨论。

本书是作者在国防科技大学讲授量子光学课程多年所用讲义的基础上，精心总结而成的。本书具有如下特点：

(1) 内容选择方面, 考虑量子光学自身理论体系的科学性、系统性、完整性及其内在联系; 尽可能多地把量子光学的新概念、新理论、新方法和新应用融合其中, 突出反映书中内容的现代化和时代性, 增强实用性和针对性。

(2) 内容优化方面, 融合作者多年量子光学教学与量子信息科研的积累, 从当前量子光学的研究成果中选择提炼出适合研究生教学的内容, 丰富并完善从事量子信息研究所需要的量子光学基础理论, 优化充实该课程的教学内容。

(3) 内容组织方面, 遵循本领域认知规律, 注重内容精练, 重点突出, 语言简洁, 推导详尽, 循序渐进, 论述清楚; 突出物理思想、物理方法、物理图像的清晰展现; 强化多思考提出问题、多总结提炼分析问题和多交流优化解决问题过程的完整表达。

(4) 习题编排方面, 每章精选一些与课本内容密切联系的习题, 一些教材内容也以习题的形式呈现。习题形式自由灵活, 难易程度不同, 涉及知识面广; 方便不同学习程度的学生选择相应习题进行演算和求解。

本书旨在使学生较系统和全面地掌握量子光学的基础理论, 把握量子光学的发展方向; 能够使学生较快地进入量子光学和量子信息的前沿领域, 开展相关科学研究; 同时, 也有益于培养学生提出问题、分析问题和解决问题, 以及自主学习与科学创新的能力。

本书要说明的是, 书中矢量、向量、矩阵都用黑体。希尔伯特空间的态矢量用狄拉克符号右矢  $|\rangle$ 、左矢  $\langle|$  内括上符号或相应的量子数来表示。如右矢  $|\psi\rangle$  表示量子态, 左矢  $\langle\psi|$  则是其厄米共轭, 有时也用黑体  $\boldsymbol{\psi}$ 、 $\boldsymbol{\psi}^*$  表示。密度算符也称为密度矩阵, 书中均用黑体  $\hat{\rho}$  表示。希尔伯特空间上的算符, 在取定基后也可用矩阵表示, 但为了书写和阅读方便, 一般写成白体, 只有在表示为矩阵形式时才作黑体处理。

在本书即将出版之际, 作者要向给予本书支持与帮助的国防科技大学教师、学生表示衷心的感谢。感谢李承祖教授, 是他引导作者转向量子信息科学的研究; 感谢江天研究员、陈平形教授、刘伟涛教授、张婷副教授, 在作者从事量子科学研究与教学过程中得到他们的大力支持; 感谢吴春旺副教授, 他与作者就书中有关问题进行了讨论; 感谢周艳丽副教授, 她对本书进行审阅并提出了宝贵意见; 感谢邹宏新研究员、邓志姣教授、钟鸣教授、吴伟副教授、张杰副研究员、林惠祖副研究员、沈咏副研究员、谢艺副研究员、欧保全高级实验师、李春燕副教授、孙帅博士、周勇壮博士等的热心帮助。还要感谢智能科学学院的张明教授、龚京忠教授, 他们对本书的撰写提出许多宝贵的建议。聂镇武、熊凯莉、何思文、何林贵、穆姝颖、汪伟全、许梦亮、张鹏飞等研究生曾阅读了本书部分初稿并提出了有益建议, 在此一并表示感谢!

---

由于作者学识水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正！作者邮箱：hydai@nudt.edu.cn 和 daihongyi1@163.com。

戴宏毅

2024 年 1 月



# 目 录

## 前言

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 第 1 章 量子力学基础 .....            | 1  |
| 1.1 量子光学的发展历程 .....           | 1  |
| 1.2 量子力学中的绘景 .....            | 4  |
| 1.2.1 薛定谔绘景 .....             | 4  |
| 1.2.2 海森伯绘景 .....             | 5  |
| 1.2.3 相互作用绘景 .....            | 7  |
| 1.2.4 旋转参考系 .....             | 8  |
| 1.3 密度算符 .....                | 11 |
| 1.3.1 纯态和混合态的密度算符 .....       | 11 |
| 1.3.2 算符的期望值 .....            | 12 |
| 1.3.3 算符的迹 .....              | 12 |
| 1.3.4 密度算符的性质 .....           | 13 |
| 1.3.5 密度算符的运动方程 .....         | 14 |
| 1.4 约化密度算符及其在量子信息处理中的应用 ..... | 15 |
| 1.4.1 期望值的计算 .....            | 16 |
| 1.4.2 纠缠态的定义 .....            | 16 |
| 1.4.3 两体纠缠态的度量 .....          | 17 |
| 1.5 小结 .....                  | 19 |
| 1.6 习题 .....                  | 21 |
| 参考文献 .....                    | 23 |
| 第 2 章 光场的量子化 .....            | 24 |
| 2.1 单模光场的量子化 .....            | 24 |
| 2.2 多模光场的量子化 .....            | 27 |
| 2.3 光子数态 .....                | 31 |
| 2.3.1 单模光子数态 .....            | 31 |
| 2.3.2 光场的 Mandel 参数 $Q$ ..... | 33 |
| 2.3.3 光场的量子涨落 .....           | 34 |
| 2.3.4 光场的正交分量算符 .....         | 34 |

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 2.3.5 多模光子数态光场的量子化 .....             | 35 |
| 2.4 光场的相位态 .....                     | 36 |
| 2.4.1 指数算符和相位算符 .....                | 37 |
| 2.4.2 指数算符的本征态 .....                 | 39 |
| 2.4.3 量子相位算符及其相位态 .....              | 40 |
| 2.4.4 单模相位态的物理性质 .....               | 42 |
| 2.5 相干态 .....                        | 43 |
| 2.5.1 相干态的定义 .....                   | 44 |
| 2.5.2 相干态的光子数及涨落 .....               | 46 |
| 2.5.3 相干态的光子数分布和 Mandel 参数 $Q$ ..... | 46 |
| 2.5.4 相干态是最小不确定关系态 .....             | 47 |
| 2.6 热光场态 .....                       | 50 |
| 2.7 小结 .....                         | 54 |
| 2.8 习题 .....                         | 59 |
| 参考文献 .....                           | 61 |
| <b>第 3 章 相干态表象及其准概率分布函数</b> .....    | 63 |
| 3.1 坐标表象中的相干态和相干态的时间演化 .....         | 63 |
| 3.2 相干态表象 .....                      | 66 |
| 3.2.1 不同的相干态不具备正交性 .....             | 66 |
| 3.2.2 相干态的完备性关系 .....                | 66 |
| 3.2.3 态矢量和算符在相干态表象中的展开 .....         | 67 |
| 3.3 相干态表象中的各种准概率分布函数 .....           | 69 |
| 3.3.1 $P(\alpha)$ 函数 .....           | 70 |
| 3.3.2 $Q(\alpha)$ 函数 .....           | 74 |
| 3.3.3 Wigner 函数 .....                | 78 |
| 3.4 特征函数 .....                       | 81 |
| 3.4.1 量子光学的三种特征函数 .....              | 82 |
| 3.4.2 各种排序算符的期望值计算 .....             | 84 |
| 3.4.3 常见的 Wigner 函数的计算 .....         | 85 |
| 3.5 小结 .....                         | 88 |
| 3.6 习题 .....                         | 90 |
| 参考文献 .....                           | 92 |
| <b>第 4 章 光场的相干性及其干涉理论</b> .....      | 94 |
| 4.1 光场的经典一阶相干性 .....                 | 94 |
| 4.1.1 光场的经典一阶相关函数 .....              | 94 |

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 4.1.2 一阶时间相干性 .....                  | 96  |
| 4.2 光场的经典高阶相干性 .....                 | 98  |
| 4.2.1 光场的经典二阶相干性和 $N$ 阶相干性 .....     | 98  |
| 4.2.2 Hanbury Brown-Twiss 实验 .....   | 99  |
| 4.3 光场相干性的量子理论 .....                 | 101 |
| 4.3.1 光子的探测过程和量子一阶相干性 .....          | 101 |
| 4.3.2 量子二阶相干性和 $N$ 阶相干性 .....        | 103 |
| 4.3.3 光子的聚束效应和反聚束效应 .....            | 104 |
| 4.3.4 多模量子化热光场分析 .....               | 107 |
| 4.4 分束器的量子力学描述及其对光场量子态的变换 .....      | 108 |
| 4.4.1 光学分束器 .....                    | 108 |
| 4.4.2 对称分束器 .....                    | 110 |
| 4.4.3 模式变换关系和分束器对态矢量的哈密顿量算符描述 .....  | 111 |
| 4.4.4 对称分束器对光场量子态的变换 .....           | 113 |
| 4.5 杨氏双缝干涉的一阶强度关联和三阶强度关联分析 .....     | 115 |
| 4.5.1 杨氏双缝干涉的一阶强度关联分析 .....          | 115 |
| 4.5.2 杨氏双缝干涉的三阶强度关联分析 .....          | 117 |
| 4.6 小结 .....                         | 119 |
| 4.7 习题 .....                         | 122 |
| 参考文献 .....                           | 124 |
| <b>第 5 章 光场的压缩态</b> .....            | 126 |
| 5.1 光场的压缩态和不确定关系 .....               | 126 |
| 5.2 单模光场的压缩态 .....                   | 128 |
| 5.2.1 单模压缩态的定义 .....                 | 129 |
| 5.2.2 单模光场压缩态下算符的期望值和涨落 .....        | 130 |
| 5.2.3 单模光场压缩态的本征方程 .....             | 133 |
| 5.2.4 单模光场压缩态在数态表象中的表示形式及光子数分布 ..... | 134 |
| 5.2.5 压缩光的统计性质 .....                 | 136 |
| 5.3 双模光场的压缩态 .....                   | 139 |
| 5.3.1 双模压缩态的定义 .....                 | 139 |
| 5.3.2 双模压缩真空态 .....                  | 141 |
| 5.4 辐射场的高阶压缩 .....                   | 144 |
| 5.5 压缩光的产生和探测 .....                  | 147 |
| 5.5.1 压缩光的产生 .....                   | 147 |
| 5.5.2 正交压缩光的探测 .....                 | 148 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 5.5.3 双模压缩真空态的产生               | 149 |
| 5.6 小结                         | 150 |
| 5.7 习题                         | 153 |
| 参考文献                           | 155 |
| <b>第 6 章 经典光场与原子相互作用的半经典理论</b> | 157 |
| 6.1 原子与光场的相互作用哈密顿量             | 157 |
| 6.2 二能级原子与经典单模光场的相互作用          | 159 |
| 6.2.1 二能级原子与经典单模光场相互作用的哈密顿量形式  | 159 |
| 6.2.2 薛定谔方程的求解                 | 161 |
| 6.2.3 结果讨论及半经典理论的局限性           | 164 |
| 6.3 二能级原子的密度矩阵方法及光学布洛赫方程       | 166 |
| 6.3.1 二能级原子的密度矩阵描述             | 166 |
| 6.3.2 二能级原子的密度矩阵元方程及光学布洛赫方程    | 167 |
| 6.3.3 耗散情况下的密度矩阵元方程            | 170 |
| 6.4 三能级原子与经典双模光场的相互作用          | 173 |
| 6.4.1 三能级原子与经典双模光场相互作用的哈密顿量形式  | 173 |
| 6.4.2 暗态及受激拉曼绝热演化              | 174 |
| 6.5 电磁感应透明                     | 176 |
| 6.5.1 三能级原子与经典双模光场相互作用的密度矩阵元方程 | 177 |
| 6.5.2 电磁感应透明分析                 | 178 |
| 6.6 无粒子数反转激光                   | 180 |
| 6.6.1 三能级原子与经典双模光场相互作用的哈密顿量形式  | 180 |
| 6.6.2 薛定谔方程的求解                 | 181 |
| 6.6.3 无粒子数反转激光分析               | 182 |
| 6.7 小结                         | 183 |
| 6.8 习题                         | 186 |
| 参考文献                           | 188 |
| <b>第 7 章 量子光场与原子相互作用的全量子理论</b> | 189 |
| 7.1 电子波场的量子化                   | 189 |
| 7.2 量子光场与电子波场相互作用的哈密顿量形式       | 191 |
| 7.3 二能级原子与量子单模光场相互作用的 J-C 模型   | 194 |
| 7.3.1 二能级原子与量子单模光场相互作用的哈密顿量形式  | 195 |
| 7.3.2 薛定谔方程的求解                 | 196 |
| 7.3.3 结果讨论及原子的坍塌-恢复现象          | 197 |
| 7.3.4 大失谐条件下问题的简化              | 200 |



|              |                                        |            |
|--------------|----------------------------------------|------------|
| 7.4          | 海森伯算符方法 .....                          | 201        |
| 7.5          | 缀饰态方法 .....                            | 203        |
| 7.5.1        | 缀饰态原子的本征态和本征能量 .....                   | 203        |
| 7.5.2        | 缀饰态之间允许的跃迁 .....                       | 205        |
| 7.5.3        | 缀饰态的时间演化 .....                         | 206        |
| 7.6          | 大失谐条件下系统的有效哈密顿量及其应用 .....              | 208        |
| 7.6.1        | 求解系统有效哈密顿量的方法 .....                    | 208        |
| 7.6.2        | 求解系统有效哈密顿量的具体实例 .....                  | 209        |
| 7.6.3        | 大失谐条件下有效哈密顿量的应用及纠缠态的制备 .....           | 211        |
| 7.7          | 自发辐射、受激辐射和受激吸收 .....                   | 213        |
| 7.7.1        | 自发辐射 .....                             | 213        |
| 7.7.2        | 受激辐射 .....                             | 214        |
| 7.7.3        | 受激吸收 .....                             | 215        |
| 7.8          | 二能级原子之间自发辐射的 Weisskopf-Wigner 理论 ..... | 216        |
| 7.9          | 小结 .....                               | 220        |
| 7.10         | 习题 .....                               | 223        |
|              | 参考文献 .....                             | 225        |
| <b>第 8 章</b> | <b>量子光学中的物理实验系统 .....</b>              | <b>226</b> |
| 8.1          | 腔量子电动力学系统 .....                        | 226        |
| 8.1.1        | 描述原子与腔场相互作用的主要参数 .....                 | 226        |
| 8.1.2        | 里德伯原子的基本性质 .....                       | 227        |
| 8.1.3        | 系统的动力学演化 .....                         | 228        |
| 8.1.4        | 耗散腔中二能级原子与单模腔场的相互作用 .....              | 230        |
| 8.1.5        | J-C 模型的实验实现 .....                      | 232        |
| 8.1.6        | 大失谐条件下腔场薛定谔猫态的制备 .....                 | 234        |
| 8.2          | 囚禁离子阱系统 .....                          | 236        |
| 8.2.1        | 囚禁离子和激光场相互作用系统的哈密顿量 .....              | 236        |
| 8.2.2        | 囚禁离子阱系统的边带冷却 .....                     | 238        |
| 8.3          | 光学系统 .....                             | 240        |
| 8.3.1        | 非简并自发参量下转换制备纠缠光子源 .....                | 240        |
| 8.3.2        | 马赫-曾德尔单光子干涉仪 .....                     | 243        |
| 8.3.3        | 相干光干涉测量 .....                          | 245        |
| 8.4          | 小结 .....                               | 247        |
| 8.5          | 习题 .....                               | 249        |
|              | 参考文献 .....                             | 250        |

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| 第 9 章 开放量子系统的量子理论 .....                                       | 252 |
| 9.1 量子系统的约化密度算符满足的主方程 .....                                   | 252 |
| 9.1.1 原子分别在热库和压缩真空库中的主方程 .....                                | 253 |
| 9.1.2 阻尼谐振子分别在热库和压缩真空库中的主方程 .....                             | 259 |
| 9.2 福克尔-普朗克方程 .....                                           | 262 |
| 9.2.1 $P$ -表示的福克尔-普朗克方程 .....                                 | 262 |
| 9.2.2 $Q$ -表示的福克尔-普朗克方程 .....                                 | 264 |
| 9.2.3 $W$ -表示的福克尔-普朗克方程 .....                                 | 265 |
| 9.3 朗之万方程 .....                                               | 267 |
| 9.3.1 阻尼谐振子的朗之万方程 .....                                       | 268 |
| 9.3.2 光场的双时关联函数和光谱线型 .....                                    | 271 |
| 9.4 开放系统与库耦合的 Lindblad 主方程 .....                              | 272 |
| 9.4.1 量子系统的约化密度算符描述及其演化 .....                                 | 272 |
| 9.4.2 超算符的表示形式 .....                                          | 274 |
| 9.4.3 开放系统非么正演化的 Lindblad 主方程 .....                           | 275 |
| 9.4.4 Lindblad 主方程的应用实例 .....                                 | 277 |
| 9.5 量子蒙特卡罗波函数方法 .....                                         | 278 |
| 9.5.1 量子蒙特卡罗波函数方法的求解步骤 .....                                  | 279 |
| 9.5.2 蒙特卡罗波函数方法在平均值上等价于主方程 .....                              | 280 |
| 9.5.3 蒙特卡罗波函数方法模拟结果分析 .....                                   | 281 |
| 9.6 小结 .....                                                  | 282 |
| 9.7 习题 .....                                                  | 284 |
| 参考文献 .....                                                    | 287 |
| 附录 .....                                                      | 288 |
| 附录 I 常用数学公式 .....                                             | 288 |
| 附录 II 复平面上的二维 $\delta^{(2)}(\alpha)$ 函数和算符的 $\delta$ 函数 ..... | 289 |
| 附录 III 泊松分布、二项式分布、高斯分布 .....                                  | 291 |
| 附录 IV 动量表象中积分时的 Wigner 函数形式 .....                             | 293 |
| 附录 V 系统动力学演化方法求解有效哈密顿量 .....                                  | 294 |
| 附录 VI 压缩真空库作用下谐振子主方程的 $I_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 值计算 .....        | 296 |

# 第 1 章 量子力学基础

本章首先回顾量子光学的发展历程；然后阐述量子力学中的绘景、旋转参考系以及它们之间哈密顿量的变换；接着讨论密度算符及其性质；最后介绍约化密度算符及其在期望值计算、纠缠态定义、纠缠度量等量子信息处理中的应用。这些讨论不但可以使人们对量子力学有一定的了解，而且是深入学习后面各章节的必要知识和基础。

## 1.1 量子光学的发展历程

人类对光的认识源远流长，对光的本性的认识经历了漫长、复杂、曲折的过程。光学随着人类对光的本质的不断探究而不断发展，有时甚至是螺旋式发展。17 世纪，明确形成了粒子说和波动说两大对立学说。波动说缺乏严谨的数学基础以及牛顿的威望，使得粒子说一直处于上风。直到 19 世纪初，托马斯·杨进行了著名的杨氏双缝干涉实验，光的波动说才获得人们的普遍认可。19 世纪 60 年代，麦克斯韦提出光的电磁理论，建立了麦克斯韦电磁方程组，预言了电磁波的存在，其传播速度等于光速，说明光是一种电磁波。后来，赫兹实验证实了麦克斯韦电磁理论，并发现了后来所知的光电效应。

19 世纪末至 20 世纪初，科学家发现了黑体辐射、光电效应等新的深层次的光学现象，在用波动理论解释这类涉及光的产生以及光与物质相互作用的新现象时，遇到了当时无法克服的困难。当然，这些困难成为即将到来的量子力学革命的种子，引发了光的量子特性研究，孕育了量子力学，推动了量子光学的发展。

量子光学的发展历程可分为三个阶段。

第一阶段：提出了光量子理论和电磁场量子化思想。

1900 年，普朗克为解释黑体辐射的紫外灾难问题，提出了能量量子化；1905 年，爱因斯坦针对经典理论解释光电效应所遇到的困难，总结了光学发展过程中微粒说和波动说长期争论的历史，在普朗克能量量子假说的基础上，提出了光的量子学说，圆满解释了光电效应。至此，光的粒子性又被重新认识并赋予全新的内涵，使人们对光的本性的认识产生了飞跃，揭示了光同时具有粒子性和波动性的双重性质。不久，科学家认识到光的波粒二象性是微观世界中一切物质普遍存在的共同性质，并促进了量子力学的建立和发展<sup>[1]</sup>。

量子理论是现代物理学的两大基石之一，不仅革新光学，开启了光的量子特性的研究，而且成为物理学发展史上一个新纪元的开端，引发了物理学基本理论的变革。许多物理学家通过颠覆性的创新发展，逐渐建立了一套完整的量子力学理论。这标志着人类对自然的认识、对客观规律的探索从宏观领域进入微观领域物理学新时代。量子力学发展历程中三个重要时期的主要成果如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1 量子力学发展历程中三个重要时期的主要成果

| 时期          | 时间          | 代表人物          | 假设或理论                                                                        |
|-------------|-------------|---------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 旧量子论时期      | 1900 年      | 普朗克           | 提出了著名的黑体辐射理论和能量量子化                                                           |
|             | 1905 年      | 爱因斯坦          | 提出了光量子理论，圆满解释了光电效应，后来又提出了光的波粒二象性思想、受激辐射理论，预言了激光                              |
|             | 1913 年      | 玻尔            | 提出了用氢原子结构的玻尔模型来解释氢原子光谱，后来又提出了互补原理和哥本哈根诠释来解释量子力学                              |
| 量子力学创立和完善时期 | 1923 年      | 德布罗意          | 提出了著名的“物质波”假设，指出光的波粒二象性是微观世界中一切物质的共同性质                                       |
|             | 1925 年      | 海森伯           | 建立了矩阵力学，后来又阐述了不确定性原理                                                         |
|             | 1926 年      | 薛定谔           | 建立了波动力学和薛定谔方程                                                                |
|             | 1926 年      | 玻恩            | 进行了波函数的统计诠释                                                                  |
|             | 1926~1928 年 | 狄拉克           | 创建了狄拉克符号、态矢量及量子力学表象理论，同时进行了电磁场的量子化，建立了量子场论的基础，并建立了相对论波动方程，预测了反粒子             |
| 量子力学纵深发展时期  | 1935 年      | 爱因斯坦、波多尔斯基、罗森 | 发表了称为爱因斯坦-波多尔斯基-罗森 (Einstein-Podolsky-Rosen, EPR) 佯谬的论文，认为量子纠缠这种超距相互作用是不可思议的 |
|             | 1964 年      | 贝尔            | 提出了贝尔不等式，使 EPR 佯谬问题的实验检验成为可能                                                 |
|             | 1972 年至今    | 克劳泽、阿斯佩、蔡林格   | 进行光子纠缠实验，验证了贝尔不等式在量子世界中不成立，开创了量子信息科学                                         |

第一阶段进行了电磁场的量子化，光的量子特性被认知，但是对光场的量子特性研究是在 20 世纪 60 年代激光发明以后。

第二阶段提出了光场相干性的量子理论，发明了激光，即量子光学诞生期。作为研究光场量子特性的重要学科分支，量子光学是在激光技术被发明以后才逐渐发展和成熟起来的。

1956 年，汉伯里·布朗(Hanbury Brown)和特维斯(Twiss)首次实现了一种能够观测光场的强度关联实验(称为 HBT 实验)，发现了热光源的光子聚束现象。HBT

实验大大促进了量子光学的发展,是物理学史上著名的三大干涉实验之一。

1960年,梅曼(Maiman)发明了世界上第一台红宝石激光器。激光相干光源因相干性、单色性、方向性俱佳和亮度极强,可使光场的量子特性得到展现和观测,同时使激光场与物质相互作用的非经典现象能更方便地得到实验观测和调控。激光被誉为20世纪继核能、计算机、半导体之后的重大发明,对人类科学技术和人们日常生活的意义重大。

1963年,格劳伯(Glauber)针对在对光本身特性进行描述时遇到的困难,认为量子化的电磁场并不能代表光的一切性质,大量光子的集体行为与普通光子有很大区别,应该发展量子理论来探索光的本质,从而创造性地提出了光的相干性的量子理论,成功描述了光量子的运动规律,奠定了量子光学的基础,开创了一门全新学科,极大地拓展了现代光学的研究范围。

1963年,杰恩斯(Jaynes)和卡明斯(Cummings)提出了旋转波近似下表征量子单模光场与二能级原子相互作用的 Jaynes-Cummings 模型(简称 J-C 模型)。此后,人们围绕 J-C 模型及其各种推广形式开展了大量富有成效的理论与实验研究。

后来,科学家又相继进行了激光光子统计、共振荧光实验中的反聚束效应、亚泊松分布效应、压缩态产生、纠缠态制备等实验,使量子光学的发展日益成熟。

第三阶段用激光来控制物质的思想。

从物质对光的控制发展到利用激光来控制物质的思想是量子光学发展过程中的一个巨大进步,激光已成为人们认识和操控微观世界的有力工具。

原先,光与物质作用的研究和应用仅局限于物质对光的作用和控制,控制光的状态和运动,如利用晶体调节光的频率、控制光的相位、选择光的偏振态等。

在激光发明以后,出现了用激光冷却和控制物质的思想,并取得了突破性进展。激光冷却、囚禁与操控方法为量子物理领域全新而重要的实验开启了微观操控的大门。近年来,量子信息学、基于原子的激光冷却和囚禁的冷原子物理是量子光学发展中产生的非常活跃的前沿研究领域,无论是在基础研究方面还是在应用研究方面都具有重要意义。这可从1997年(发明用激光冷却和囚禁原子的方法)、2001年(实现冷原子的玻色-爱因斯坦凝聚)、2005年(建立光的量子相干理论及发展激光的精密光谱学)、2012年(提出的突破性实验方法能测量和操控单个量子系统而不破坏其量子性质)、2018年(在激光物理学领域的突破性发明:光镊技术及啁啾脉冲放大技术)和2022年(用纠缠光子验证了量子领域不遵循贝尔不等式,开创了量子信息学)的诺贝尔物理学奖授予该领域的17位科学家得到充分说明。

量子光学实行对光子的操纵和相干调控,观测符合量子力学规律的复杂多样的物理现象,已从一门专门研究光场量子特性的学科,逐渐演变为融合量子信息科学、冷原子物理、激光物理等多个研究领域的大学科,在新兴的量子信息科学

中发挥着不可替代的作用。

当前,量子科学技术的迅猛发展展现出微观系统中量子操控蕴含的广阔应用前景。利用量子特性开发量子通信、量子计算和量子精密测量等崭新的应用技术。利用光场进行操控和探测,无论是在验证量子力学基本原理,还是在量子通信、量子计算、量子精密测量等应用研究中,均是重要的手段;同时,它还为不同学科的交叉融合提供了研究基础、实验方法和技术支撑。量子精密测量不仅可突破传统探测手段的局限,而且在提升测量精度、简化测量过程中发挥着重要作用。例如,利用光的压缩态可以做到低于量子噪声极限的精密测量;将 NOON 态等非经典态作为马赫-曾德尔干涉仪的探测态,测量精度不仅可以超越标准量子极限,甚至可以达到海森伯极限。

目前,量子光学的发展为探索微观系统各种奇妙的量子效应提供了极佳的理论基础,同时也为提升人类量子操控的能力和开发各种新的量子技术提供了保障<sup>[1]</sup>。21 世纪,量子领域的新发现、量子光学的新发展,使得量子通信、量子计算和量子精密测量等量子技术密集涌现,预示着第二次量子革命的到来。

## 1.2 量子力学中的绘景

量子系统随时间的演化包括态矢量和物理量算符两个方面,因此描述微观量子系统状态及其动力学规律的方式不是唯一的,对时间演化的处理方式不同,使得量子力学具有不同的绘景。绘景是描述量子系统随时间演化的方式,通常有薛定谔绘景、海森伯绘景和相互作用绘景<sup>[2-7]</sup>。为了进行区分,常对三种绘景中的任意态矢量和物理量算符分别用下标 S、H 和 I 标记。这三种绘景都是量子力学的表述,在物理上等价,所获结果完全一致。

为便于转换和比较,约定在初始时刻  $t_0$ , 三种绘景的态矢量和物理量算符相同。

### 1.2.1 薛定谔绘景

薛定谔绘景是指力学量算符与时间无关,而系统态矢量随时间演化的一种绘景。在薛定谔绘景中,系统态矢量随时间的演化由薛定谔方程描述,即

$$i\hbar \frac{d|\psi_S(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi_S(t)\rangle \quad (1.2.1)$$

式中,  $\hat{H}$  和  $|\psi_S(t)\rangle$  分别为希尔伯特空间中薛定谔绘景的哈密顿量和系统态矢量(有时为书写方便,常省略薛定谔绘景的标记 S)。

根据薛定谔方程(1.2.1)和初始时刻  $t_0$  的态矢量  $|\psi_S(t_0)\rangle$  条件,可求出  $t$  时刻的态矢量  $|\psi_S(t)\rangle$  为

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_S(t_0)\rangle \quad (1.2.2)$$

式中,  $\hat{U}(t, t_0)$  为系统哈密顿量决定的时间演化算符, 其作用是将  $t_0$  时刻的态矢量变换为  $t$  时刻的态矢量。

将式(1.2.2)代入薛定谔方程(1.2.1)可得到时间演化算符方程, 即

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}\hat{U}(t, t_0) \quad (1.2.3)$$

对式(1.2.3)两边从  $t_0$  到  $t$  积分, 并利用初始条件  $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$ , 可得

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) \hat{U}(t_1, t_0) \quad (1.2.4)$$

对式(1.2.4)进行逐次迭代, 可得

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \cdots \hat{H}(t_n) \quad (1.2.5)$$

当  $\hat{H}$  不显含时间(即薛定谔绘景中哈密顿量与时间无关)时, 注意到

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{(t-t_0)^n}{n!}, \text{ 可将式(1.2.5)简化为}$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \times (t-t_0) \right]^n = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \times (t-t_0) \right] \quad (1.2.6)$$

在量子力学中, 测量是用一个厄米算符  $\hat{A}$  来描述, 常见的物理量算符有坐标、动量、角动量、能量等。

在薛定谔绘景中, 算符  $\hat{A}$  虽与时间无关, 但其期望值一般随时间变化, 即

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle \quad (1.2.7)$$

可见, 在薛定谔绘景中不能直接看出算符随时间变化的规律。首先要知道  $|\psi_S(t)\rangle$  随时间变化的规律, 然后利用式(1.2.7)确定算符  $\hat{A}$  随时间变化的规律。

## 1.2.2 海森伯绘景

把量子系统随时间的演化归因于力学量算符随时间的演化, 而态矢量不随时间变化的绘景, 称为海森伯绘景。

规定在初始时刻  $t_0$ , 海森伯绘景中的系统初态与薛定谔绘景中的系统初态相同, 于是有

$$|\psi_H(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle, \quad \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}_S \quad (1.2.8)$$

由于算符  $\hat{A}$  的期望值与绘景无关, 所以有

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_S(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) | \psi_S(t_0) \rangle \\ &= \langle \psi_H | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | \hat{A}_H(t) | \psi_H \rangle\end{aligned}\quad (1.2.9)$$

式中

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) \quad (1.2.10)$$

为算符在海森伯绘景中的形式。

因为  $\hat{H}_S$  与  $\hat{U}(t, t_0)$  对易, 所以  $\hat{H}_H = \hat{H}_S = \hat{H}$ , 也就是说, 系统的哈密顿量在这两种绘景中完全相同。

对式(1.2.10)两边求时间导数, 并利用式(1.2.3), 可得

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= \frac{d\hat{U}^\dagger(t, t_0)}{dt} \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) + \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} \\ &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H(t)]\end{aligned}$$

即

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, \hat{H}] \quad (1.2.11)$$

称为算符的海森伯运动方程, 它是在海森伯绘景中描述系统运动规律的动力学方程。当  $[\hat{A}_H, \hat{H}] = 0$  时,  $\hat{A}_H$  称为守恒量。

下面讨论海森伯绘景中的基矢。首先, 在薛定谔绘景中, 关于算符  $\hat{A}_S$  的本征方程为

$$\hat{A}_S |a_i\rangle_S = a_i |a_i\rangle_S \quad (1.2.12)$$

可见, 在薛定谔绘景中, 基矢不随时间变化, 因为此时力学量算符不随时间变化。然后, 考察海森伯绘景中的基矢情况。设  $t_0$  时刻这两种绘景重合, 将时间演化算符的厄米共轭  $\hat{U}^\dagger(t, t_0)$  作用于式(1.2.12)两边, 再插入恒等算符  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ , 可得

$$\hat{U}^\dagger \hat{A}_S \hat{U} \hat{U}^\dagger |a_i\rangle_S = a_i \hat{U}^\dagger |a_i\rangle_S \quad (1.2.13)$$

式(1.2.13)可看作算符  $\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0)$  的本征值方程, 即

$$\hat{A}_H |a_i, t\rangle_H = a_i |a_i, t\rangle_H \quad (1.2.14)$$

式中

$$|a_i, t\rangle_H = \hat{U}^\dagger(t, t_0) |a_i\rangle_S \quad (1.2.15)$$

是算符  $\hat{A}_H(t)$  属于本征值  $a_i$  的本征矢, 也是海森伯绘景中的基矢。可见, 在海森



伯绘景中的态矢量不随时间变化，但基矢随时间变化。

可以说，海森伯绘景实际上是系统的量子态，不随时间演化，始终处于一个确定的态矢量上，而基矢随时间演化，系统的物理量算符在么正变换下随时间演化。

### 1.2.3 相互作用绘景

在许多实际问题中，系统的哈密顿量算符可分为两部分，即

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (1.2.16)$$

式中， $\hat{H}_0$  为无相互作用时系统的自由哈密顿量，不显含时间，且其本征值可严格求解； $\hat{V}$  为系统的相互作用哈密顿量，通常显含时间，因此对系统有特别的影响。

上述不标注是哪种绘景的都是指薛定谔绘景中的物理量。在这种情况下，求出系统的态矢量和物理量算符随时间的演化，采用相互作用绘景极为方便。

系统态矢量由薛定谔绘景变换到相互作用绘景的方法是引入么正变换，使得

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}_0(t, t_0) |\psi_I(t)\rangle \quad (1.2.17)$$

式中

$$\hat{U}_0(t, t_0) = \exp\left[-i\hat{H}_0 \times (t - t_0) / \hbar\right] \quad (1.2.18)$$

可见  $\hat{U}_0(t_0, t_0) = 1$ 。将么正变换  $\hat{U}_0(t, t_0)$  对时间求导，可得

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_0}{dt} = \hat{H}_0 \hat{U}_0 \quad (1.2.19)$$

在初始时刻  $t_0$ ，相互作用绘景和薛定谔绘景的态矢量重合，即

$$|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle \quad (1.2.20)$$

现在推导相互作用绘景中态矢量  $|\psi_I(t)\rangle$  满足的运动方程。在薛定谔绘景中，对于哈密顿量算符(1.2.16)，态矢量  $|\psi_S(t)\rangle$  满足的运动方程为

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_S(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}) |\psi_S(t)\rangle \quad (1.2.21)$$

将式(1.2.17)代入式(1.2.21)，可得

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle + i\hbar \hat{U}_0 \frac{\partial |\psi_I(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \hat{U}_0 |\psi_I(t)\rangle$$

利用式(1.2.19)，可将上式简化为

$$i\hbar \hat{U}_0 \frac{\partial |\psi_I(t)\rangle}{\partial t} = \hat{V} \hat{U}_0 |\psi_I(t)\rangle$$

对上式两端左乘  $\hat{U}_0^\dagger$ , 可得相互作用绘景中态矢量  $|\psi_1(t)\rangle$  满足的薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_1(t)\rangle}{\partial t} = \hat{V}_1(t) |\psi_1(t)\rangle \quad (1.2.22)$$

式中

$$\hat{V}_1(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{V} \hat{U}_0(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0 \times (t-t_0)/\hbar} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 \times (t-t_0)/\hbar} \quad (1.2.23)$$

为相互作用绘景中的相互作用哈密顿量。

式(1.2.22)表明, 相互作用绘景中系统态矢量  $|\psi_1(t)\rangle$  的时间演化, 原则上由系统的相互作用能量  $\hat{V}_1(t)$  决定, 所以它突出了相互作用能的效应。

任意算符  $\hat{A}$  的期望值为

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_1(t) | \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0) | \psi_1(t) \rangle \\ &= \langle \psi_1(t) | \hat{A}_1(t) | \psi_1(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

式中

$$\hat{A}_1(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0) \quad (1.2.25)$$

为算符  $\hat{A}$  变换到相互作用绘景中的表示形式。

对式(1.2.25)两边求时间导数, 并代入式(1.2.19), 可得

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} &= i\hbar \frac{d\hat{U}_0^\dagger(t, t_0)}{dt} \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S i\hbar \frac{d\hat{U}_0(t, t_0)}{dt} \\ &= [-\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_0 \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0) + \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{H}_0 \hat{U}_0(t, t_0)] \\ &= [\hat{A}_1, \hat{H}_0] \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

即算符  $\hat{A}_1$  的演化方程满足

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_1}{dt} = [\hat{A}_1, \hat{H}_0] \quad (1.2.27)$$

这是算符  $\hat{A}$  在相互作用绘景中的动力学方程。

#### 1.2.4 旋转参考系

在量子物理系统中, 选取旋转参考系变换有时比使用相互作用绘景更为方便, 能进一步简化系统的哈密顿量。

设  $|\psi(t)\rangle$  和  $|\psi'(t)\rangle$  分别是原绘景和新绘景(即旋转参考系)的态矢量,  $|\psi(t)\rangle$  满足的薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.2.28)$$

则  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi'(t)\rangle$ ,  $|\psi'(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t) |\psi(t)\rangle$ , 其中, 么正变换  $\hat{U}(t)$  为

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \quad (1.2.29)$$

从而有

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\psi'(t)\rangle}{\partial t} &= i\hbar \left[ \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} |\psi(t)\rangle + \hat{U}^\dagger(t) \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \right] \\ &= i\hbar \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} |\psi(t)\rangle + \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} |\psi(t)\rangle \\ &= i\hbar \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} \hat{U}(t) |\psi'(t)\rangle + \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} \hat{U}(t) |\psi'(t)\rangle \\ &= \left[ i\hbar \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} \hat{U}(t) \right] |\psi'(t)\rangle \\ &= \hat{H}' |\psi'(t)\rangle \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

式中

$$\hat{H}' = i\hbar \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} \hat{U} + \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \quad (1.2.31)$$

由于哈密顿量  $\hat{H}'$  是厄米算符,  $\hat{H}' = \hat{H}'^\dagger$ , 所以  $\hat{H}'$  也可表示为

$$\hat{H}' = -i\hbar \hat{U}^\dagger \frac{d\hat{U}}{dt} + \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \quad (1.2.32)$$

方程(1.2.30)即为薛定谔方程形式不变时, 新的旋转参考系下的薛定谔方程。实际上, 这是量子力学中的一种规范变换。

比较旋转参考系和相互作用绘景可知, 相互作用绘景中么正变换  $\hat{U}_0$  中的  $\hat{H}_0$  一定是  $\hat{H}$  的一部分, 而旋转参考系中式(1.2.29)的么正变换  $\hat{U}(t)$  中的  $\hat{H}_0$  可以灵活选取, 可达到简化哈密顿量、方便求解的目的, 这在求解量子系统中的具体问题时非常重要。需要说明的是, 在旋转参考系中求解其薛定谔方程与求解相互作用绘景的薛定谔方程, 除了一个由守恒量决定的相位因子外所得结果一致, 有时将旋转参考系与相互作用绘景等同起来。

**例 1.2.1** 一个本征跃迁频率为  $\omega_0$  的二能级原子与光场频率为  $\omega$  的单模量子光场相互作用, 在旋转波近似下描述该系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad (1.2.33)$$

式中,  $\hat{a}^\dagger$  和  $\hat{a}$  分别为光子的产生算符和湮没算符;  $\hat{\sigma}_z$  为原子反转算符;  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$

和  $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$  为原子的上升和下降算符； $g$  为原子与光场的耦合系数。

可以采用三种方法对式(1.2.33)进行旋转参考系中的哈密顿量变换。

**变换 1** 若  $\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ ，则其么正变换和旋转参考系中的哈密顿量分别为

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right) = \exp\left[-i\left(\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z\right)t\right] \quad (1.2.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= -i\hbar\hat{U}^\dagger \frac{d\hat{U}}{dt} + \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \\ &= -i\hbar(-i\hat{H}_0/\hbar) + \hat{U}^\dagger [\hat{H}_0 + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)]\hat{U} \\ &= \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{i\Delta t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{-i\Delta t}) \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

式中， $\Delta = \omega_0 - \omega$  为光场与原子能级耦合的失谐量。式(1.2.35)正好是将薛定谔绘景中的哈密顿量变换为相互作用绘景中的哈密顿量。

**变换 2** 若  $\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right)$ ，则其么正变换和旋转参考系中的哈密顿量分别为

$$\hat{U} = \exp\left[-i\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right)t\right] \quad (1.2.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= -i\hbar\hat{U}^\dagger \frac{d\hat{U}}{dt} + \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \\ &= -i\hbar\left[-i\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right)\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Delta\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

这是选择以光场频率为旋转参考系的基准频率，从而使旋转参考系中的哈密顿量不显含时间。

**变换 3** 若  $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right)$ ，则其么正变换和旋转参考系中的哈密顿量分别为

$$\hat{U} = \exp\left[-i\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right)t\right] \quad (1.2.38)$$

$$\hat{H}' = -\hbar\Delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \quad (1.2.39)$$

在上面的运算中，需要利用算符展开定理，即

$$\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A}) = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots \quad (1.2.40)$$