

“现代数学基础丛书”序

在信息时代, 数学是社会发展的基石.

由于互联网的迅猛发展, 一方面, 现在人们获得数学知识和信息的途径之多样和便捷性是以前难以想象的; 另一方面人们通过搜索在互联网获得的数学知识和信息很难做到系统深入, 也很难保证在互联网上阅读到的数学知识和信息的质量.

在这样的背景下, 高品质的数学书就变得益发重要.

科学出版社组织出版的“现代数学基础丛书”旨在对重要的数学分支和研究方向或专题作系统的介绍, 注重基础性和时代性. 丛书的目标读者主要是数学专业的高年级本科生、研究生以及数学教师和科研人员, 丛书的部分卷对其他与数学联系紧密的学科的研究生和学者也是有参考价值的.

本丛书自 1981 年面世以来, 已出版 200 余卷, 介绍的主题广泛, 内容精当, 在业内享有很高的声誉, 深受尊重, 对我国的数学人才培养和数学研究发挥了非常重要的作用.

这套丛书已有四十余年的历史, 一直得到数学界各方面的大力支持, 科学出版社也十分重视, 高专业标准编辑丛书的每一卷. 今天, 我国的数学水平不论是广度还是深度都已经远远高于四十年前, 同时, 世界数学的发展也更为迅速, 我们对跟上时代步伐的高品质数学书的需求从而更为迫切. 我们诚挚地希望, 在大家的支持下, 这套丛书能与时俱进, 越办越好, 为我国数学教育和数学研究的继续发展做出不负期望的重要贡献.

席南华

2024 年 1 月

前 言

本书是在 2013 年第一版的基础上修改而成的, 第 1~6 章介绍分形几何的基本知识, 以及如何利用软件 MATLAB 做出分形图形. 第 7 章介绍 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数. 第 8~12 章介绍狄氏型理论、热核理论, 以及 Sierpiński 垫片上狄氏型的构造和对应的热核估计. 具体修改如下:

(1) 增加了 MATLAB 基本知识 (见 3.1 节), 修改并简化了第一版中的 MATLAB 程序, 以便在 R2023a 版本上运行. 本书新添加了 16 个 MATLAB 程序 (第 1~6 章), 包含 44 个 MATLAB 程序代码.

(2) 添加了自相似测度, 满足加倍性质 (见 7.4 节).

(3) 修正了第一版的某些错误.

(4) 在第一版前言的文献处和正文中, 更新并添加了一些参考文献.

(5) 添加了数学家 Pierre-Simon Laplace (1749~1827) 的简介 (见第 9 章拓展阅读).

数学家的简介, 是经过作者精心挑选和加工的, 资料均来自权威性网站, 主要参考英国圣安德鲁斯大学数学与统计学院的网站: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>. 本书中的练习题放在每章末, 以方便读者练习.

本书的 LaTeX 源文件, 是使用软件 Scientific Workplace 5.5 输入而成的, 所有 MATLAB 程序均可在 2023a 版本上运行. 本书的出版, 得到了国家出版基金的资助, 在此表示感谢. 作者在本书的修订过程中, 也得到了国家自然科学基金 (编号: 12271282) 的资助. 最后, 作者衷心感谢科学出版社的编辑李欣、李月婷和李萍为本书的出版所付出的辛勤劳动.

胡家信

清华大学数学科学系

2025 年 4 月于北京清华园

第一版前言

“分形” (fractal) 一词由 Benoît Mandelbrot 于 1975 年提出, 来源于拉丁文 “*fractus*”, 意为“破碎”或“不规则”, 但分形的数学思想可以追溯到 17 世纪数学家 Gottfried Leibniz 提出的“回归自相似”概念. 1872 年, 数学家 Karl Weierstrass 构造了连续但处处不可微的函数, 该函数的图像现在被普遍认为是一个分形. 1904 年, 数学家 Helge von Koch 不满 Weierstrass 抽象分析的定义, 利用甚至连小朋友都能掌握的简单画图 (几何) 方法, 构造一个类似函数的图像, 现在被称为 von Koch 曲线, 该曲线也是连续但处处不可微的. 波兰数学家 Waclaw Sierpiński 分别于 1915 年和 1916 年, 构造现在称为 Sierpiński 垫片和 Sierpiński 地毯的图形, 它们是两个典型分形, 但性质截然不同: 前者属于“有限分枝”, 即不同的小块相交为有限集合; 而后者属于“无限分枝”, 即不同的小块相交为无限集合. 随后, 在 19 世纪末和 20 世纪初, 利用自相似性, 数学家们构造出更多的分形, 如 Cantor 集 (1883 年)、Fatou 集 (1917 年)、Julia 集 (1918 年)、Lévy 曲线 (1938 年) 等, 但直到 20 世纪 60 年代计算机的出现, 人们才看清许多原来发现的分形所呈现的漂亮图形.

最初, 人们关心的主要是分形集的几何 (静态) 结构, 如 Hausdorff 维数、Hausdorff 测度、多重分形等, 或者分形图像处理, 以及与分形密切相关的动力系统 (如 Julia 集和 Mandelbrot 集) 和涉及生物学领域的 L-系统等. 20 世纪 80 年代, 物理学家和数学家开始关心分形集的分析 (动态) 结构, 研究分形区域上的布朗运动. 1988 年, 数学家 M. Barlow 和 E. Perkins 利用随机过程理论, 构造性地证明了 Sierpiński 垫片上布朗运动的存在性, 并得到转移密度 (或热核) 的上下界优美估计. 1990 年, T. Lindstrøm 在更为广泛的一类分形集, 即嵌套分形 (nested fractal) 上构造布朗运动. 随后, M. Barlow 和 R. Bass 在 20 世纪 80 年代末和 90 年代初, 构造出平面 Sierpiński 地毯上的布朗运动, 并同时得到热核上下界估计; 1999 年, 他们将此结果推广到高维空间中的 Sierpiński 地毯 (海绵). 以上工作, 都借助于复杂的随机过程理论.

一个自然的问题: 是否可以用较简单的分析方法得到类似结果, 并推广到其他分形区域? 日本数学家 J. Kigami (1989 年) 和 M. Fukushima (1992 年) 等首先进行这方面的研究, 构造了 Sierpiński 垫片上的局部、正则、保守、自相似的狄氏型, 该狄氏型正好对应 Barlow 和 Perkins 等所构造的布朗运动. 随后, J. Kigami

对更一般的分形集进行研究, 在 1993 年提出后临界有限 (post-critically finite) 自相似集的概念 (这类分形集都是有限分枝的). 利用分析的方法, J. Kigami 和 R. Strichartz 等数学家, 较系统地研究了后临界有限自相似集这类分形区域上的狄氏型、Laplace 算子和谱分析等. 进一步, Kenneth J. Falconer (1999 年) 等利用山路引理, 研究基本分形集上的某些非线性偏微分方程. 从而, 形成与概率学派相媲美的分析学派, 使得这一方向的研究变得生机勃勃, 方兴未艾.

分形集上的热核估计是这一方向研究的重要焦点. 热核本身是诸多物理现象的根源, 在数学物理、几何学、概率论和随机过程理论、图论、函数空间理论, 包括分形几何等诸多数学领域起着极其重要的作用, 属数学领域的交叉研究课题. 如著名的 Atiyah-Singer 指标定理的证明和七大“世纪数学猜想”之一的 Poincaré 猜想的解决, 都离不开热核及其估计. 近年来, 本书作者与 Alexander Grigor'yan、Ka-Sing Lau 等合作, 尝试利用纯分析技巧, 研究度量测度空间上的热核估计及其相关问题^[23~31], 包括从不同角度找出热核估计各种各样的等价条件. 但这一方向的研究还远未成熟, 特别是分形集上热核的研究, 仍是未来研究的焦点之一.

从 2006 年起, 作者为清华大学高年级本科生和研究生开设了分形几何课程, 尝试介绍上述方面的基本理论. 本书是根据作者的讲义稿编写的, 目的是为初学者简单介绍这一方向的基础知识. 作者并不希望本书涉及较深的数学知识, 特别是前五章, 主要用到压缩映射原理、测度论的基本知识以及软件 MATLAB, 可以供非数学专业的科研人员参考; 后面五章涉及的数学知识较多, 特别是狄氏型和热核部分, 主要供数学系的研究生或数学专业科研人员参考. 本书中的所有分形图像都是利用 MATLAB 程序实现的, 每个图像后面都附上 MATLAB 代码, 共有 28 个 (包括练习题). 有关 MATLAB 的基本知识, 请读者参考相关书籍或网络, 这里不作系统介绍. 为了增加本书的趣味性, 有些章节后面还介绍与分形密切相关的一些著名数学家的生平.

本书难免有错误之处, 恳请读者批评指正. 作者网址:

<https://www.math.tsinghua.edu.cn/info/1125/1614.htm>.

致谢 感谢英国圣安德鲁斯 (St-Andrews) 大学 Kenneth J. Falconer, 将作者引入奇妙的分形世界, 他的数学思维方式, 在很大程度上影响着本书作者. 感谢德国比勒费尔德 (Bielefeld) 大学 Alexander Grigor'yan, 多次邀请作者到德国访问, 以及和作者进行的富有成效的学术讨论和长期良好的学术合作. 感谢香港中文大学刘家成 (Ka-Sing Lau) 和德国耶拿 (Jena) 大学 Martina Zähle 多年来的支持和邀请访问. 本书采用了清华大学学生编写的一部分 MATLAB 程序, 在此表示感谢. 感谢中国科学院科学出版基金、国家自然科学基金 (编号 11071108) 和清华大学自主科研课题的资助. 最后, 感谢陶利玲女士多年来的耐心和支持.

文献 有很多介绍分形几何的书籍, 如涉及分形图像处理的书籍有文献 [8,9],

涉及分形理论基础的书籍或文献有 [24], [25], [48], [58], 涉及分形分析的书籍或文献有 [64], [49], [62], 涉及综合或分形在其他学科应用的书籍有文献 [57], [59], [60], Julia 集与动力系统密切相关, 这方面的专著有文献 [13]. 关于布朗运动及其转移密度 (热核) 的文献很多, 例如, 读者可参考 [1]—[4], [6], [7], [10], [35], [36], [38], [39], [41], [43], [45], [46], [50]—[52], [55]. 介绍黎曼流形上热核与分析的书籍, 请读者参考专著 [28]. 跳跃过程转移密度的研究是近年来国际研究的焦点, 这方面已经有大量工作出现, 例如 [5], [11], [12], [14], [18], [19], [21], [20], [22], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [40] 等等. 介绍狄氏型的书籍有 [26], [56], 介绍函数空间的书籍有 [23], [47], 介绍 Laplace 变换的书籍有 [61], [63]. 关于泛函分析, 读者可参考书籍 [65]. 关于 MATLAB 的书籍, 浩如烟海, 读者可参考 [27] 或者 [53]. 数学史部分, 读者可参考英国圣安德鲁斯大学网站:

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>.

关于数学概念或分形简介, 有兴趣的读者也可参考网站:

<http://en.wikipedia.org/>,

或者 <http://classes.yale.edu/fractals/>.

由于本书篇幅所限, 还有许多其他重要参考文献, 这里没有一一列出. 为此, 读者也可利用下列网站找到相关资料:

美国数学学会:

<http://www.ams.org/mathscinet/>;

一般学术搜索网站, 如:

<http://scholar.google.com.hk/>;

或者数学论坛, 如:

<http://mathoverflow.net/>.

胡家信

清华大学数学科学系

清华大学数学科学中心

2013 年 3 月于北京清华园

目 录

“现代数学基础丛书”序

前言

第一版前言

第 1 章 自相似集	1
1.1 压缩映射原理	1
1.2 Hausdorff 度量	4
1.3 自相似集的定义	9
1.4 练习题	11
第 2 章 后临界有限自相似集	13
2.1 定义	13
2.2 例子	15
2.3 性质	17
2.4 练习题	20
第 3 章 自相似集的 MATLAB 作图	21
3.1 MATLAB 基本知识	21
3.2 Sierpiński 垫片的 MATLAB 作图	28
3.3 Sierpiński 地毯的 MATLAB 作图	35
3.4 相似集的 MATLAB 作图	39
3.5 自仿集的 MATLAB 作图	44
3.6 练习题	48
第 4 章 随机分形	52
4.1 羊齿叶	52
4.2 随机树	58
4.3 随机花边图案和随机花环	60
4.4 随机 Koch 曲线	63
4.5 渗流丛	65

4.6	随机分形与确定分形	68
4.7	练习题	70
第 5 章	Julia 集、Mandelbrot 集和反问题	75
5.1	Julia 集	75
5.2	Mandelbrot 集	82
5.3	拼贴定理及反问题	84
5.4	练习题	88
第 6 章	L-系统	91
6.1	不含 X, Y 的确定 L-系统	92
6.2	含 X, Y 的确定 L-系统	98
6.3	含中括号的确定 L-系统	102
6.4	含其他字母的确定 L-系统	105
6.5	随机 L-系统	107
6.6	L-系统的动画作图	110
6.7	练习题	113
第 7 章	Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数	118
7.1	测度	118
7.2	自相似测度	122
7.3	分割和开集条件	125
7.3.1	分割	125
7.3.2	开集条件	127
7.4	自相似测度的加倍性质	130
7.5	Hausdorff 测度	134
7.6	Hausdorff 维数	140
7.7	Hausdorff 维数的计算	143
7.8	练习题	148
第 8 章	热半群和狄氏型	150
8.1	自伴算子和谱分解	150
8.2	半群	154
8.3	热半群	157
8.4	狄氏型	162

8.5	练习题	166
第 9 章	Sierpiński 垫片上的狄氏型	168
9.1	Sierpiński 垫片上狄氏型的构造	168
9.2	调和函数	176
9.3	有效阻抗	180
9.4	Green 函数	183
9.5	Laplace 算子	187
9.6	练习题	190
第 10 章	Sierpiński 垫片上狄氏型定义域的刻画	192
10.1	度量空间上的 Sobolev 型空间	192
10.2	狄氏型定义域的刻画	199
10.3	练习题	206
第 11 章	热核理论	207
11.1	热核的定义	207
11.2	热核估计的意义	208
11.2.1	测度的 Ahlfors 正则性	209
11.2.2	热核的狄氏型	211
11.3	从属热核	218
11.3.1	卷积半群和从属热核	218
11.3.2	Laplace 变换	221
11.3.3	完全单调函数	227
11.3.4	Bernstein 函数	232
11.4	从属热核的估计	239
11.5	练习题	243
第 12 章	Sierpiński 垫片上的热核估计	244
12.1	抛物极大值原理	244
12.2	半群的超压缩性	246
12.3	Sierpiński 垫片上的热核上界估计	250
12.3.1	热核上对角估计	251
12.3.2	Poisson 型方程	251
12.3.3	存活估计	253

12.3.4	尾部 $P_t 1_{B^c}$ 的指数估计	255
12.3.5	热核非对角上界估计	260
12.4	Sierpiński 垫片上的热核下界估计	261
12.4.1	下对角估计	261
12.4.2	近似下对角估计	262
12.4.3	非对角下界估计	262
12.5	练习题	265
参考文献		267
索引		271

“现代数学基础丛书”已出版书目

第 1 章 自相似集

本章介绍一般度量空间上的自相似集. 自相似集是一个非空紧集, 即我们常说的分形, 任何一列有限的压缩映射均可以产生唯一的自相似集, 这可以利用 Hausdorff 度量及压缩映射原理来证明.

1.1 压缩映射原理

让 (M, d) 是一个非空的度量空间, 即 M 是一个非空集合, 而 $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ 是 M 上的一个度量: 对任意 $x, y, z \in M$,

- 非负性: $0 \leq d(x, y) < \infty$;
- 身份不辨性: $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- 对称性: $d(x, y) = d(y, x)$;
- 三角不等式: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

常见的度量空间是欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ ($n \geq 1$), 其中两点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的度量 $d(x, y)$ 定义为

$$d(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2},$$

或者定义为

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

以下概念经常用到:

• 集合 $A \subset M$ 是完备的 (complete): 任何 Cauchy 序列收敛于 A 中的某个点, 即若序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset A$ 满足

$$d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty),$$

则存在某个点 $x \in A$, 使得 $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 例如, 闭区间 $[0, 1]$ 在 $(\mathbb{R}, d)$ 上是完备的, 但 $(0, 1]$ 不是完备的, 这是因为区间 $(0, 1]$ 中的序列 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 是一个 Cauchy 序列, 但端点 0 不属于区间 $(0, 1]$. 又如, 所有 $[0, 1]$ 区间上的连续函数在一致范数下是完备的.

• 集合 $A \subset M$ 是完全有界的 (totally bounded): 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在有限个半径为 ε 的闭球, 使得集合 A 被这些闭球所覆盖, 即存在有限个点 $x_1, x_2, \dots, x_N \in M$ 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N \overline{B(x_k, \varepsilon)},$$

其中

$$\overline{B(x, \varepsilon)} = \{z \in M : d(z, x) \leq \varepsilon\}$$

为 M 中球心是 x 、半径是 ε 的闭球. 序列 $\{x_k\}_{k=1}^N$ 也称为 A 的 ε -网. 一维空间上的闭球, 实际就是我们常说的有限闭区间. 例如, 集合 $(0, 1]$ 在 $(\mathbb{R}, d)$ 上是完全有界的, 但集合 $[0, \infty)$ 却不是完全有界的, 这是因为该集合是无限的, 不能被有限个有界区间所覆盖.

• 集合 $A \subset M$ 是紧的 (compact): A 中的任何序列均含一个在 A 中收敛的子列, 或等价地, 度量空间 (A, d) 是完备且完全有界的. 例如, 闭集 $[0, 1]$ 在 $(\mathbb{R}, d)$ 上是紧的, 但集合 $(0, 1]$ 或者 $[0, \infty)$ 却不是紧的. 实际上, 不难看出, 欧氏空间的子集 A 是紧的当且仅当 A 是有界闭集.

• 集合 $A \subset M$ 是可分的 (separable): A 包含一个可数稠密的子集. 例如, 欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是可分的. 又如, 所有 $(0, 1)$ 区间上的平方可积函数构成的空间 $L^2(0, 1)$ 也是可分的.

• 集合 $A \subset M$ 是局部紧的 (locally compact): A 中的每点都有一个准紧 (precompact) 邻域, 即对任意 $x \in A$, 存在 x 的一个邻域, 其闭包是紧的. 例如, 欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 中的任何集合 A 均是局部紧的.

映射 $f: M \rightarrow M$ 是压缩的 (有时也称为 Lipschitz 映射), 若存在常数 $0 \leq c < 1$ 使得

$$d(f(y), f(x)) \leq c d(y, x), \quad \forall x, y \in M. \quad (1.1)$$

反例 映射 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 在 $M = [1, 2]$ 上不是压缩映射, 这是因为虽然

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{1}{4}|x - y|, \quad \forall x, y \in [1, 2],$$

但 f 不是 $M = [1, 2]$ 到 $M = [1, 2]$ 上的映射. 该函数在 $M = [0, 1]$ 上也不是压缩映射, 这是因为虽然 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 但

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{(1+x)(1+y)} \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

成立当且仅当 $c \geq 1$.

定理 1.1 (压缩映射原理) 设 (M, d) 是一个非空完备度量空间, $f: M \rightarrow M$ 是一个压缩映射, 则 f 在 M 中有唯一不动点 y_0 : $f(y_0) = y_0$.

证明 让 $a \in M$. 令 $x_0 = a$, $x_1 = f(a)$,

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (k \geq 1),$$

即每个点 $x_1, x_2, \dots$ 是对点 a 经过若干次压缩而来的, 则 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是 (M, d) 中的一个 Cauchy 序列. 事实上, 因 f 是压缩的, 由 (1.1) 得

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq c d(x_k, x_{k-1}) \\ &\leq c^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \cdots \\ &\leq c^k d(x_1, x_0) = c^k d(x_1, a), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

再利用三角不等式,

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+m}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \cdots + d(x_{k+m-1}, x_{k+m}) \\ &\leq (c^k + c^{k+1} + \cdots + c^{k+m-1}) d(x_1, a) \\ &\leq \frac{c^k}{1-c} d(x_1, a), \quad \forall m, k \geq 0. \end{aligned}$$

既然 $0 \leq c < 1$, 从而 $d(x_k, x_{k+m}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 这就证明了 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是 (M, d) 中的一个 Cauchy 序列.

因为 (M, d) 是完备性的, 故存在一点 $y_0 \in M$ 使得 $x_k \rightarrow y_0$ ($k \rightarrow \infty$), 从而

$$y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k-1}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k-1}\right) = f(y_0),$$

即 y_0 是 f 的不动点.

最后, 设 $z_0 \in M$ 也是 f 的不动点, 则

$$d(y_0, z_0) = d(f(y_0), f(z_0)) \leq c d(y_0, z_0),$$

从而 $d(y_0, z_0) = 0$, $y_0 = z_0$. 唯一性得证. □

压缩映射原理有时也称为 Banach 不动点定理. 从上述证明看出, 对任意点 $x \in M$, 迭代序列

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x), \dots\}$$

总是度量空间 (M, d) 上的一个 Cauchy 序列, 收敛于 f 的不动点.

1.2 Hausdorff 度量

Hausdorff 度量 (也叫 Pompeiu–Hausdorff 距离) 是衡量度量空间中两个集合的距离, 以数学家 Hausdorff 的名字命名. Hausdorff 度量的用途之一是将非空紧集形成的集合变成一个度量空间, 在证明自相似集的存在性时非常有用.

格运算 $\vee, \wedge$ 表示

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad \text{即两实数 } a \text{ 和 } b \text{ 中较大的,}$$

$$a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad \text{即两实数 } a \text{ 和 } b \text{ 中较小的.}$$

对任意非空集合 $S \subset \mathbb{R}$, 上确界 $\sup S$ (或最小上界) 是一个实数, 它是比集合 S 中的任意数都大或相等的最小实数. 若此实数不存在, 则令 $\sup S = +\infty$. 同样, 下确界 $\inf S$ (或最大下界) 是指比集合 S 中任意数都小或相等的最大实数. 若此实数不存在, 则令 $\inf S = -\infty$.

定义 1.2 让 A, B 是度量空间 (M, d) 上的两个非空集合, 定义它们的 Hausdorff 距离 $d_H(A, B)$ 为

$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A), \quad (1.2)$$

其中 $d(a, B)$ 表示点 a 与集合 B 之间的距离:

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

也就是说, Hausdorff 距离是一个集合的最远点与另一个集合的 (最近) 距离. 比如, 海南省与内陆之间的 Hausdorff 距离是内陆最北点漠河市与海南省之间的距离, 而不是徐闻县 (内陆离海南省最近的县) 与海南省之间的距离.

例题 1.3 令 $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, 区间 $A = [1, 7], B = [3, 6] \subset A$, 容易看出

$$\sup_{a \in A} d(a, B) = |1 - 3| = 2,$$

$$\sup_{b \in B} d(b, A) = 0,$$

$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A) = 2 \vee 0 = 2.$$

故区间 A 和区间 B 的 Hausdorff 距离为 2 (注意 $\inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) = 0$), 它是集合 A 的最远点 (即区间端点 “1”) 与集合 B 的 (最近) 距离.

值得注意的是, 式 (1.2) 在工程和具体计算时使用方便. 但在某些情况下 (如数学证明), 下面 Hausdorff 距离的等价定义往往有优越性:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}, \quad (1.3)$$

其中

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \{x \in M : d(x, a) \leq \varepsilon\}$$

表示与 A 距离不大于 ε 的所有点构成的集合 (有时也称为 A 的 ε -闭邻域, 或绕 A 半径为 ε 的广义闭球).

命题 1.4 式 (1.3) 成立.

证明 令

$$s = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\},$$

$$t = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A).$$

欲证 $s = t$.

事实上, 对任意 $\delta > 0$, 由 s 的定义得

$$A \subset B_{s+\delta} \quad \text{同时} \quad B \subset A_{s+\delta}.$$

故对任意 $a \in A$, $d(a, B) \leq s + \delta$; 同时, 对任意 $b \in B$, $d(b, A) \leq s + \delta$, 从而

$$t = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A) \leq s + \delta,$$

故由 δ 的任意性, 推出 $t \leq s$.

另一方面, 由 t 的定义得: 对任意 $a \in A$, 任意 $b \in B$,

$$d(a, B) \leq t \quad \text{同时} \quad d(b, A) \leq t.$$

故 $A \subset B_t$, $B \subset A_t$, 推出

$$s = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\} \leq t.$$

所以 $s = t$. □

命题 1.5 对任意集合 $A, B, C, D \subset M$, 下列成立:

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq d_H(A, C) \vee d_H(B, D). \quad (1.4)$$

证明 不妨设 $d_H(A, C) < \infty, d_H(B, D) < \infty$, 否则 (1.4) 自然成立.

令 $s_1 = d_H(A, C), s_2 = d_H(B, D)$, 不妨设 $s_1 \leq s_2$. 欲证

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq s_2. \quad (1.5)$$

事实上, 关于 s_1 , 利用定义 (1.3): 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$A \subseteq C_{s_1+\varepsilon} \subseteq C_{s_2+\varepsilon},$$

$$C \subseteq A_{s_1+\varepsilon} \subseteq A_{s_2+\varepsilon}.$$

同理, 关于 s_2 , 我们有

$$B \subseteq D_{s_2+\varepsilon}, \quad D \subseteq B_{s_2+\varepsilon}.$$

于是,

$$A \cup B \subseteq C_{s_2+\varepsilon} \cup D_{s_2+\varepsilon} \subseteq (C \cup D)_{s_2+\varepsilon},$$

$$C \cup D \subseteq A_{s_2+\varepsilon} \cup B_{s_2+\varepsilon} \subseteq (A \cup B)_{s_2+\varepsilon},$$

从而, 再利用定义 (1.3),

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq s_2 + \varepsilon,$$

由 ε 任意性,

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq s_2. \quad \square$$

一般地, Hausdorff 距离不一定是一个度量, 因为可能出现

$$d_H(A, B) = \infty,$$

如 A 或者 B 无界. 但是, d_H 在所有非空紧集构成的集合

$$\mathcal{K} := \{A \subseteq M : A \text{ 是非空紧集}\} \quad (1.6)$$

上的确是一个度量.

定理 1.6 设 $\mathcal{K}$ 是如 (1.6) 所定义的度量空间 (M, d) 上所有非空紧子集构成的集合, 则 Hausdorff 距离 d_H 是 $\mathcal{K}$ 上的一个度量.

证明 欲证 d_H 是集合 $\mathcal{K}$ 上的度量, 需证明 d_H 满足下列三个性质: 对任意 $A, B, C \in \mathcal{K}$,

- 非负性: $0 \leq d_H(A, B) < \infty$;
- 身份不辨性: $d_H(A, B) = 0$ 当且仅当 $A = B$;

- 对称性: $d_H(A, B) = d_H(B, A)$;
- 三角不等式: $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

事实上, 利用 (1.3), 容易验证 d_H 满足对称性 $d_H(A, B) = d_H(B, A)$, $d_H(A, A) = 0$, 以及对任意紧集 A, B :

$$0 \leq d_H(A, B) < \infty.$$

为证明身份不辨性, 设 $A \neq B$, 则存在一点 $a \in A$ 但 $a \notin B$, 从而

$$d_H(A, B) \geq \sup_{x \in A} d(x, B) \geq d(a, B) > 0,$$

这里严格大于零利用了 B 是闭集这一性质, 从而证明了身份不辨性.

最后, 证明 d_H 满足三角不等式: 对任意 $A, B, C \in \mathcal{K}$,

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

事实上, 对任意 $a \in A$ 和任意 $c \in C$,

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \inf_{b \in B} d(a, b) \leq \inf_{b \in B} (d(a, c) + d(c, b)) \\ &= d(a, c) + \inf_{b \in B} d(c, b) \\ &= d(a, c) + d(c, B) \\ &\leq d(a, c) + \sup_{c \in C} d(c, B). \end{aligned}$$

两边对 c 取下确界得

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \inf_{c \in C} d(a, c) + \sup_{c \in C} d(c, B) \\ &= d(a, C) + d_H(C, B) \\ &\leq d_H(A, C) + d_H(C, B), \end{aligned}$$

所以

$$\sup_{a \in A} d(a, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

同理, 将上述不等式中的 A 换成 B 以及 B 换成 A , 则得

$$\sup_{b \in B} d(b, A) \leq d_H(B, C) + d_H(C, A) = d_H(A, C) + d_H(C, B),$$

故有

$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B),$$

即 d_H 满足三角不等式. □

定理 1.7 若度量空间 (M, d) 完备, 则度量空间 $(\mathcal{K}, d_H)$ 也完备, 这里 $\mathcal{K}$ 如前 (1.6) 所定义, 表示 M 上所有非空紧子集构成的集合.

证明 设 $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{K}$ 是一个 Cauchy 序列, 即

$$d_H(A_k, A_m) \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty.$$

我们将构造一个非空紧集 A 使得 $d_H(A_k, A) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

事实上, 集合 A 为

$$A = B_1 \cap B_2 \cap \cdots,$$

其中 $B_k = \overline{A_k \cup A_{k+1} \cup \cdots}$, 即集合 B_k 是并集 $A_k \cup A_{k+1} \cup \cdots$ 的闭包. 注意 $\{B_k\}$ 递减:

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots.$$

为此, 需证下列性质:

- (a) A 是紧的;
- (b) $A \neq \emptyset$;
- (c) $d_H(A_k, A) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

证明 (a) 只需证明 B_1 是紧的. 首先注意到 B_1 是完备的, 这是因为 (M, d) 是完备的且 B_1 是闭的, 由完备性定义可知 B_1 是完备的.

为证明 B_1 是紧的, 剩下只需证明 B_1 是完全有界的. 事实上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 选取 m 使得

$$d_H(A_k, A_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{对所有 } k = m, m+1, \cdots.$$

由 (1.3) 知, 每个 A_k 包含在 A_m 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ -邻域内. 既然 A_m 是紧的, 它也是完全有界的, 所以存在有限 $\frac{\varepsilon}{2}$ -网 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 覆盖 A_m , 从而, $\{x_i\}_{i=1}^N$ 是每个 A_k 的 ε -网, 连同前面集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ 的 ε -网合并, 就构成了 B_1 的 ε -网. 故 B_1 是完全有界的.

(b) $\{B_k\}$ 是递减的非空紧集, 由 Cantor 相交定理^① 知, 其无穷交集

$$A = \bigcap_{k \geq 1} B_k$$

非空.

(c) 对任意 $\varepsilon > 0$, 选取 m 使得每个 A_k ($k \geq m$) 包含在 A_m 的 ε -邻域 $(A_m)_\varepsilon$ 内: $A_k \subset (A_m)_\varepsilon$, 从而

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq B_m = \overline{\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k} \subseteq (A_m)_\varepsilon,$$

即 $A \subseteq (A_m)_\varepsilon$. 另一方面, 对充分大 m ,

$$A_m \subseteq \overline{\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k} = B_m \subseteq A_\varepsilon,$$

后一个包含关系是根据 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ 和 $\{B_k\}$ 是递减的.

故由定义 (1.3), 对充分大 m , $d_H(A_m, A) < \varepsilon$. □

1.3 自相似集的定义

任意有限个压缩映射均可产生唯一的非空紧集, 该非空紧集在这些压缩映射下产生的图像, 可以拼成紧集本身, 从而导致该紧集具有自相似的特性.

定理 1.8 (Moran-Hutchinson 定理) 设 N 是一个正整数, (M, d) 是一个完备度量空间, 每个映射 $f_i: M \rightarrow M$ ($1 \leq i \leq N$) 均是压缩的, 则存在唯一非空的紧子集 $K \subset M$ 满足

$$K = \bigcup_{i=1}^N f_i(K). \quad (1.7)$$

证明 如前, 集合 $\mathcal{K}$ 由 (1.6) 给出, 定义集合 $\mathcal{K}$ 上的映射 F 如下:

$$F(A) = \bigcup_{k=1}^N f_k(A), \quad \forall A \in \mathcal{K}, \quad (1.8)$$

^① Cantor 相交定理: 设 $\{A_k\}$ 是完备度量空间 (M, d) 上一列递减、非空紧集 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq \cdots$, 那么无限交 $\bigcap_{k \geq 1} A_k \neq \emptyset$ 非空. 事实上, 对每个 $n \geq 1$, 选取点 $x_n \in A_n$, 则点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 即所有点 x_n 包含在半径有限的一个球内. 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$, 即 $d(x_{n_k}, x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). 由于 $A_k \subseteq A_{k-1}$, 故 $x \in \bigcap_{k \geq 1} A_k$.

其中 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ 是集合 A 在映射 f 下的像. 设 f_i 的压缩比为 $c_i \in [0, 1]$:

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leq c_i d(x, y), \quad \forall x, y \in M. \quad (1.9)$$

我们记

$$c = \max_{1 \leq i \leq N} \{c_i\},$$

显然, $0 \leq c < 1$. 对 $A, B \in \mathcal{K}$ 和任意 $a \in A, b \in B$,

$$d(f_i(a), f_i(B)) \leq c_i d(a, B) \leq c_i d_H(A, B),$$

$$d(f_i(b), f_i(A)) \leq c_i d(b, A) \leq c_i d_H(B, A),$$

从而, 由式 (1.2) 知

$$d_H(f_i(A), f_i(B)) = \sup_{a \in A} d(f_i(a), f_i(B)) \vee \sup_{b \in B} d(f_i(b), f_i(A)) \leq c_i d_H(A, B).$$

故利用 (1.4),

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &= d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq N} \{d_H(f_i(A), f_i(B))\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \{c_i\} d_H(A, B) = c d_H(A, B), \end{aligned}$$

从而, 映射 F 在 $\mathcal{K}$ 上是压缩的; 当然它也是连续的, 它将 (M, d) 上的非空紧集映成非空紧集.

另一方面, 由定理 1.7 知, 空间 $(\mathcal{K}, d_H)$ 是完备的, 故由压缩映射原理, 映射 F 在 $\mathcal{K}$ 上有唯一的不动点 K , 即 (1.7) 成立. $\square$

定义 1.9(自相似集) 有限个压缩映射 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 称为一个迭代函数系 (iterated function system, IFS), 满足 (1.7) 的非空紧集 K 称为关于迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的一个自相似集 (self-similar set).

对任何 $0 \leq c < 1$, 度量空间 (M, d) 上满足

$$d(f(x), f(y)) = cd(x, y), \quad \forall x, y \in M \quad (1.10)$$

的映射 f 称为 (压缩) 相似映射.

有些文献 (如 [8], [24]) 将本书中定义的自相似集称为吸引子 (attractor), 或不变集 (invariant set) (如 [48]), 而由相似映射产生的吸引子方称为自相似集 (如 [48]). 本书的称法与文献 [49] 一致.