

前 言

场论是地球物理学、勘查技术与工程、电子电力类工程等专业的一门重要专业基础课程。它的任务是，在电磁学的基础上，深入研究和学习电磁场、引力场等物理场的规律、性质以及求解物理场的基本方法，从理论上解决物理场的正演和反演问题，满足相关专业对于理论的需求。

本书是编者在多年的教学经验基础上，根据教学讲义、教学研究，并参考国内同类教材编写而成的，参考学时为 60~80 课时，可用于相关本科专业场论课程的教学，也可供相关科技人员参考。

学习场论需要读者具备高等数学、大学物理、数学物理方法的相关知识基础。本书编写遵循少而精的原则，内容简明扼要，推理过程力求严格准确，注重对读者逻辑思维和科学思维的培养与训练。希望读者通过学习本书，能基本掌握电磁场、引力场等的基本理论和典型求解方法，为后续课程的学习和研究打下必要且坚实的理论基础。

全书共六章：第 1 章为数学基础概论；第 2 章为静电场；第 3 章为稳恒电流场；第 4 章为稳恒磁场；第 5 章为引力场；第 6 章为含时电磁场。全书采用国际单位制。为了帮助读者掌握课程的主要内容，提高分析问题和解决问题的能力，书中编有各类例题和习题，并附有习题答案。

本书由文晓涛，陈进超、闫珉编写。在编写过程中得到了成都理工大学地球物理学院领导与同仁的大力支持；同时，多年从事地球物理专业课程教学的教师提出了许多宝贵意见与建议，在此谨向童开宇、陈小凤、雷丹、王华军、梁春涛、周怀来等同仁一并致以诚挚的谢意。

由于编者水平、认识上的局限性，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

2025 年 6 月

目 录

前言

第 1 章 数学基础概论	1
1.1 矢量代数	1
1.1.1 矢量的表示	1
1.1.2 矢量的运算	2
1.2 矢量场论	4
1.2.1 梯度	4
1.2.2 散度	4
1.2.3 旋度	5
1.2.4 哈密顿算符	5
1.2.5 几个定理	6
1.2.6 哈密顿算符在球坐标系和柱坐标系中的表示	8
1.2.7 拉普拉斯算符在球坐标系和柱坐标系中的表示	9
1.3 拉普拉斯方程	10
1.3.1 球坐标系中的拉普拉斯方程	10
1.3.2 柱坐标系中的拉普拉斯方程	11
习题 1-3	13
第 2 章 静电场	14
2.1 真空中的静电场方程	14
2.1.1 库仑定律和电场强度	14
2.1.2 叠加原理	15
2.1.3 静电场的基本方程	16
2.1.4 静电场的势 势方程	18
2.1.5 偶极子场	21
2.1.6 电荷分布的矩——电多极展开	25
习题 2-1	26
2.2 电介质中的静电场方程	27
2.2.1 静电场中的介质	27
2.2.2 介质的极化	27

2.2.3 介质中的静电场	29
习题 2-2	32
2.3 边界条件	33
2.3.1 边界条件的导出	33
2.3.2 导体表面的边界条件	35
2.3.3 自然条件	36
习题 2-3	38
2.4 静电场能	38
2.4.1 真空的静电场能	38
2.4.2 有介质存在时的静电场能	40
2.4.3 外场中电偶极子	40
习题 2-4	41
2.5 唯一性定理	41
2.5.1 唯一性定理的表述	42
2.5.2 唯一性定理的应用	44
习题 2-5	51
2.6 静电场的求解	52
2.6.1 泊松方程	52
2.6.2 高斯定理	54
2.6.3 电像法	55
2.6.4 分离变量法	65
2.6.5 复数势法	85
2.6.6 格林函数法	92
2.6.7 近似方法	97
习题 2-6	102
第 3 章 稳恒电流场	107
3.1 稳恒电流场的基本方程	107
3.1.1 稳恒电流场中的媒质	107
3.1.2 电流密度	108
3.1.3 稳恒电场	109
3.1.4 叠加原理	109
3.1.5 电流的连续性方程	109
3.1.6 欧姆定律的微分形式	110
3.1.7 稳恒电流场的基本方程导出	111
习题 3-1	116

3.2	边界条件	116
3.2.1	电流密度的法向分量	116
3.2.2	电流密度的切向分量	117
3.2.3	界面上的电荷面密度	118
	习题 3-2	118
3.3	稳恒电流场的边值问题及其求解	119
3.3.1	稳恒电流场与静电场的比较	119
3.3.2	稳恒电流场的求解	120
	习题 3-3	128
3.4	电阻率法勘探的原理	129
3.4.1	等效电阻和接地电阻	129
3.4.2	电阻率法勘探中地表电势的分布	132
	习题 3-4	133
第 4 章	稳恒磁场	134
4.1	真空中稳恒磁场的基本方程	134
4.1.1	稳恒磁场的实验定律	134
4.1.2	稳恒磁场的基本方程	136
	习题 4-1	139
4.2	磁介质对磁场的影响 磁场能量 边界条件	139
4.2.1	磁介质的分类	139
4.2.2	磁介质的磁化	140
4.2.3	介质中的磁场基本方程	142
4.2.4	物态方程	143
4.2.5	磁场能量	144
4.2.6	边界条件	148
	习题 4-2	151
4.3	稳恒磁场的矢势和标势	152
4.3.1	矢势	152
4.3.2	磁标势 磁荷	158
	习题 4-3	167
4.4	磁偶极子与磁多极展开	168
4.4.1	磁偶极子	168
4.4.2	磁多极展开	171
	习题 4-4	172
4.5	稳恒磁场的求解	172

4.5.1 电流的观点	173
4.5.2 磁荷的观点	173
习题 4-5	186
第 5 章 引力场	188
5.1 引力场概述	188
5.1.1 万有引力定律	188
5.1.2 引力场强	189
5.1.3 叠加原理	189
5.1.4 引力场的基本方程	189
5.1.5 引力势	190
5.1.6 边界条件	191
5.1.7 引力势与磁标势的关系——泊松方程	194
习题 5-1	197
5.2 重力场概述	197
5.2.1 重力场强	197
5.2.2 重力势	199
5.2.3 局域展开	201
习题 5-2	204
第 6 章 含时电磁场	205
6.1 麦克斯韦方程组和电磁场的能量、动量	205
6.1.1 电磁感应定律和位移电流	205
6.1.2 麦克斯韦方程组	208
6.1.3 物态方程	210
6.1.4 洛伦兹力	211
6.1.5 叠加原理	211
6.1.6 电磁场的边界条件	211
6.1.7 电磁场的能量和动量	212
6.1.8 似稳电磁场	214
习题 6-1	222
6.2 平面单色电磁波的传播	222
6.2.1 平面单色电磁波	223
6.2.2 平面单色电磁波在介质表面的反射和折射	228
6.2.3 平面单色电磁波在导体中的传播	233
6.2.4 导体表面的反射和折射	238

习题 6-2	243
6.3 波导管与谐振腔	244
6.3.1 矩形波导管	245
6.3.2 矩形谐振腔	249
习题 6-3	253
6.4 电磁场的势描述	253
6.4.1 电磁场的矢势和标势	253
6.4.2 规范变换和规范不变性	254
6.4.3 达朗贝尔方程	255
6.4.4 达朗贝尔方程的解——推迟势	256
习题 6-4	261
6.5 偶极辐射场	261
6.5.1 计算辐射场的一般公式	262
6.5.2 矢势的多极展开	263
6.5.3 电偶极辐射和磁偶极辐射	264
习题 6-5	270
部分习题参考答案	273
参考文献	287
附录 A 球贝塞尔函数	288
附录 B 麦克斯韦理论的适用界限	289

第 1 章 数学基础概论

数学方法是场论的有机组成部分，本章将对必需的数学基础做简单的介绍，基本上是结论性的，主要分为三部分：矢量代数、矢量场论、拉普拉斯方程。

本章主要为学习场论及地球物理勘探方法原理提供数学理论基础。

1.1 矢量代数

1.1.1 矢量的表示

矢量 $\mathbf{A}$ 的大小(也称模)记作 $|\mathbf{A}|$ 或 A ，其单位矢量可以用 $\mathbf{e}_A$ 表示，于是

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{e}_A = A \mathbf{e}_A \quad (1.1.1)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 本身与坐标系无关，但其表示形式与坐标系有关。

在直角坐标系中(图 1.1.1)，我们以 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 表示 x 、 y 、 z 轴上的单位矢量，则

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (1.1.2)$$

其中， A_x 表示 $\mathbf{A}$ 沿 x 轴的投影，这样其模为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1.1.3)$$

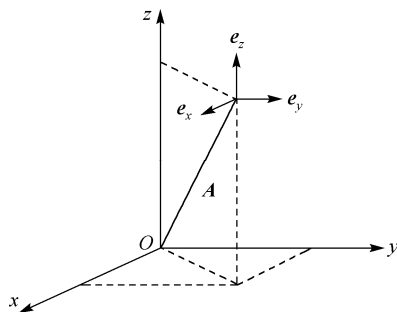


图 1.1.1 直角坐标系

在本书中，我们常用的坐标系还有球坐标系(图 1.1.2)和柱坐标系(图 1.1.3)，以 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\alpha$ 和 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\alpha$ 、 $\mathbf{e}_z$ 表示各单位矢量，则 $\mathbf{A}$ 还可表示为

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\alpha \mathbf{e}_\alpha + A_z \mathbf{e}_z$$

式中, $A = (A_r^2 + A_\theta^2 + A_\alpha^2)^{1/2}$ 或 $A = (A_r^2 + A_\alpha^2 + A_z^2)^{1/2}$.

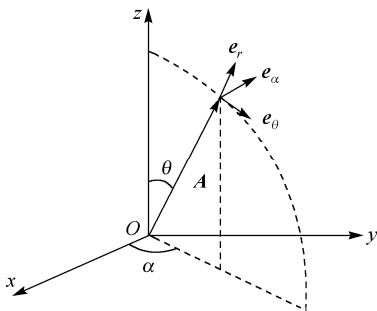


图 1.1.2 球坐标系

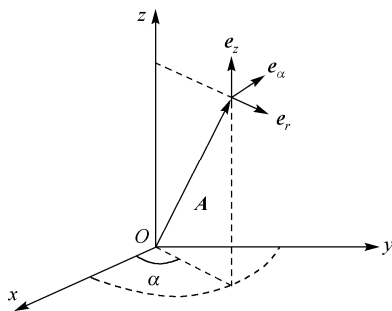


图 1.1.3 柱坐标系

1.1.2 矢量的运算

- (1) 矢量相等: $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的模相等, 方向一致.
 - (2) 矢量的逆: $\mathbf{A}=-\mathbf{B}$, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的模相等, 方向相反.
 - (3) 零矢量: $\mathbf{A}=\mathbf{0}$, 如果 $\mathbf{A}$ 的模为零.
 - (4) 矢量的倍乘: $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ 的模为 $\mathbf{B}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍, 方向与 $\mathbf{B}$ 相同 ($\lambda>0$) 或相反 ($\lambda<0$).
 - (5) 矢量加法: $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$, 为三角形法则, 如图 1.1.4 所示.
- 此外, 矢量减法为: $\mathbf{A}=\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{B}+(-\mathbf{C})$, 是加法的逆运算.
- (6) 矢量的加法和倍乘满足交换律和结合律.
 - (7) 矢量的标积: 本书中, 以 $\equiv$ 表示定义或恒等, 则

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta \quad (1.1.4)$$

矢量的标积亦称点积或数量积. 式中, θ 为 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的夹角, $\theta = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$. 矢量的标积满足交换律和分配律; 矢量的标积与坐标系无关, 但可以用坐标系对其进行表示. 例如, 在直角坐标系中

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1.5)$$

- (8) 矢量的矢积:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv AB \sin \theta \mathbf{e}_n \quad (1.1.6)$$

式中, $\mathbf{e}_n$ 是按右手螺旋定则, 当右手四指从 $\mathbf{A}$ 矢量绕向 (沿小于 180° 夹角) $\mathbf{B}$ 矢量时, 大拇指指向的单位矢量, 如图 1.1.5 所示.

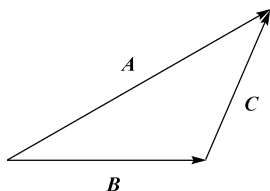


图 1.1.4 矢量加法

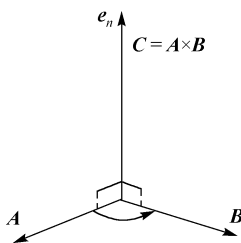


图 1.1.5 矢量的矢积

矢量的矢积又称叉积或叉乘. 矢量的矢积满足结合律, 但不满足交换律, 且 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

矢量的矢积与坐标系无关, 但在不同坐标系中有不同的表示形式. 例如, 在直角坐标系中,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

(9) 几个公式:

$$\mathbf{A}^2 \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad (1.1.8)$$

混合积

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (1.1.9)$$

二重矢积

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (1.1.10)$$

(10) 矢量的微分: 设 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 和 $\lambda(t)$ 都是时间的函数, 于是

$$\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{A}) = \mathbf{A} \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (1.1.11)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (1.1.12)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (1.1.13)$$

特别地, 若 $\mathbf{A}$ = 常量, 则 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$ 或 $d\mathbf{A} \perp \mathbf{A}$.

1.2 矢量场论

1.2.1 梯度

梯度是针对空间的标量函数(称之为标量场)而定义的,用以描述该标量场的空间局域变化性质.

定义 1.2.1 设标量场 $\varphi(\mathbf{r})$, 取 $\mathbf{e}_n$ 为其在场点 $\mathbf{r}$ 处空间变化率最大的方向, 则 $\varphi(\mathbf{r})$ 的梯度记作 $\text{grad}\varphi$, 有

$$\text{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (1.2.1)$$

讨论:

(1) $\text{grad}\varphi(\mathbf{r})$ 为矢量, 所以又构成一矢量场, 称为梯度场, $\text{grad}\varphi$ 的方向沿 $\varphi(\mathbf{r})$ 在场点 $\mathbf{r}$ 变化率最大的方向, 也就是 φ 的等值面的法向.

(2) 梯度 $\text{grad}\varphi(\mathbf{r})$ 沿任意方向 $\mathbf{e}_l$ 的投影即为 $\varphi(\mathbf{r})$ 沿该方向的变化率, 称为方向导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = (\text{grad}\varphi) \cdot \mathbf{e}_l \quad (1.2.2)$$

(3) 梯度与坐标系的选择无关, 在直角坐标系中可表示为

$$\text{grad}\varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \varphi + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \varphi = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi(x, y, z) \quad (1.2.3)$$

1.2.2 散度

散度是为了描述矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的纵向变化率而引入的.

定义 1.2.2 设矢量场 $\mathbf{A}$, 对于空间一点 P , 包围小体积 ΔV , S 为其外表面(封闭), $d\mathbf{S}$ 为面积元, 方向沿外法向. 令 ΔV 向 P 点收缩, 则散度记作 $\text{div}\mathbf{A}$.

$$\text{div}\mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1.2.4)$$

讨论:

(1) $\text{div}\mathbf{A}$ 是标量, 它描述了矢量场 $\mathbf{A}$ 在单位体积内穿过该体积的通量, 即通量密度, 同时也描述了矢量场 $\mathbf{A}$ 的源和尾的特性. 如果某点 $\text{div}\mathbf{A} > 0$, 则称该处为矢量场 $\mathbf{A}$ 的源头; 如果某点 $\text{div}\mathbf{A} < 0$, 则称该处为矢量场 $\mathbf{A}$ 的尾端; 如果 $\text{div}\mathbf{A} \neq 0$, 则称矢量场 $\mathbf{A}$ 为有源场, 此时它的场线方向总是与产生它的“源”的梯度方向(即源变化最快的方向)平行(或沿其“纵向”), 因此有源场又被称为纵场; 如果场中的任意一点都有 $\text{div}\mathbf{A} = 0$, 则称矢量场 $\mathbf{A}$ 为无源场, 相应地, 无源场又被称为横场.

(2) $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 与坐标系的选择无关. 在直角坐标系中, 它可以表示为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \quad (1.2.5)$$

1.2.3 旋度

旋度用以描述矢量场的横向变化率.

定义 1.2.3 设矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, 通过场 $\mathbf{A}$ 中一点 P 作一个小平面 ΔS , 其边界为一小的闭合回路 L . 确定 L 的绕向, $d\mathbf{l}$ 为 L 上的一微元线段, 并以右手螺旋定则确定 ΔS 的法向单位矢量 $\mathbf{e}_n$. 作环路积分 $\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, 当 $\mathbf{e}_n$ 取某一方向时, $\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 取最大值, 记此时的法向单位矢量为 $\mathbf{e}_m$, 对应的环路积分为 $\oint_{(L)}^{(m)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, 则 $\mathbf{A}$ 在 P 点的旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 定义为

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_m \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(L)}^{(m)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1.2.6)$$

讨论:

(1) $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 为矢量, 它描述了矢量场 $\mathbf{A}$ 的横向(垂直于力线方向)的变化率. 同时, 它也给出了 $\mathbf{A}$ 的涡旋强度, 即最大环流(也称“涡流”)面密度. 如果 $\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$, 则称 $\mathbf{A}$ 为无旋场; 如果 $\operatorname{rot} \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 则称 $\mathbf{A}$ 为有旋场, 亦为横场. 例如, 稳恒磁场(静磁场)就是有旋场.

(2) $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 与坐标系无关. 在直角坐标系中, 它可以表示为

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \mathbf{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

综上所述, 对于矢量场 $\mathbf{A}$, 为了描述其局域变化性质, 引入了散度和旋度的概念. 从原则上讲, 当我们掌握了矢量场的散度和旋度所遵循的规律, 即认为完全了解了矢量场 $\mathbf{A}$ 的变化规律.

1.2.4 哈密顿算符

哈密顿算符 ∇ 是一个微分算符, 同时又具有矢量性, 与坐标系无关. 在直角坐标系中, 它可以表示为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2.8)$$

这样, 以上定义的梯度、散度、旋度均可以用 ∇ 算符表示

$$\text{grad} \varphi \equiv \nabla \varphi \quad (1.2.9)$$

$$\text{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.2.10)$$

$$\text{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2.11)$$

以下列出 ∇ 算符的运算公式, 设 $u = u(\mathbf{r})$, $v = v(\mathbf{r})$.

$$(1) \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u \quad (1.2.12)$$

$$(2) \nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{A} \quad (1.2.13)$$

$$(3) \nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A} \quad (1.2.14)$$

$$(4) \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (1.2.15)$$

$$(5) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.2.16)$$

$$(6) \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (1.2.17)$$

$$(7) \nabla \varphi(u) = \frac{d\varphi}{du} \nabla u \quad (1.2.18)$$

$$(8) \nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \nabla u \quad (1.2.19)$$

$$(9) \nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (1.2.20)$$

$$(10) \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi \quad (1.2.21)$$

$$(11) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (1.2.22)$$

在式(1.2.21)和式(1.2.22)中出现的 $\nabla^2 \equiv \Delta$ 称为拉普拉斯算符, 为二阶偏微分算符. 在直角坐标系中, 它可以表示为

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.2.23)$$

1.2.5 几个定理

(1) 一个标量场的梯度必为无旋场, 或者无旋场可以表示为一个标量场的梯度, 即

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (1.2.24)$$

(2) 一个矢量场的旋度必为无散场, 或者无散场可表示为一个矢量场的旋度, 即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.2.25)$$

(3) 高斯定理: 在矢量场 $\mathbf{A}$ 中, 取一个区域 Ω , 其封闭外表面 S , dV 为 Ω 上的体积元, $d\mathbf{S}$ 为 S 上的面积元, 方向沿外法向, 设 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 是可积的, 则

$$\int_{(\Omega)} \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.26a)$$

上式称为高斯定理. 如果在上式中取 $\mathbf{A}$ 为 $\varphi \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{C}$ 为任一常矢量, 则可得到以下两式:

$$\int_{(\Omega)} \nabla \varphi dV = \oint_{(S)} \varphi d\mathbf{S} \quad (1.2.26b)$$

$$\int_{(\Omega)} \nabla \times \mathbf{A} dV = \oint_{(S)} d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \quad (1.2.26c)$$

(4) 斯托克斯定理: 在矢量场 $\mathbf{A}$ 中, 取一个曲面 S , 其边界为闭合曲线 L , 并取 $d\mathbf{S}$ 为 S 上的面积元, $d\mathbf{l}$ 为 L 上的有向线元, $d\mathbf{l}$ 的方向与 $d\mathbf{S}$ 构成 (“大致”) 右手螺旋关系, 设 $\nabla \times \mathbf{A}$ 在 S 上是可积的, 于是有

$$\int_{(S)} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.2.27a)$$

上式称为斯托克斯定理. 如果在上式中, 取 $\mathbf{A}$ 为 $\varphi \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{C}$ 为任意常矢量, 则可得到

$$\int_{(S)} d\mathbf{S} \times \nabla \varphi = \oint_{(L)} \varphi d\mathbf{l} \quad (1.2.27b)$$

$$\int_{(S)} d\mathbf{S} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \oint_{(L)} d\mathbf{l} \times \mathbf{A} \quad (1.2.27c)$$

例 1.2.1 设 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, $r = |\mathbf{r}|$, 求 ∇r , $\nabla \cdot \mathbf{r}$, $\nabla \times \mathbf{r}$.

解 利用 ∇ 在直角坐标系里的表示式, 有

$$\nabla r = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = 3$$

$$(\nabla \times \mathbf{r})_x = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \text{ 同样对于 } y, z \text{ 分量, 有 } (\nabla \times \mathbf{r})_y = 0, (\nabla \times \mathbf{r})_z = 0, \text{ 故 } \nabla \times \mathbf{r} = 0.$$

例 1.2.2 证明

$$\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = 0 \quad (1.2.28)$$

证 由式 (1.2.14) 有

$$\begin{aligned} \nabla \times [f(r)\mathbf{r}] &= f(r)\nabla \times \mathbf{r} + \nabla f(r) \times \mathbf{r} \\ &= \nabla f(r) \times \mathbf{r} = \frac{df(r)}{dr} \nabla r \times \mathbf{r} \\ &= \frac{df(r)}{dr} \frac{1}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

例 1.2.3 设源点 $Q(x', y', z')$, 场点 $P(x, y, z)$, $\mathbf{r}$ 为由源点 Q 指向场点 P 的矢径, 即 $\mathbf{r} = (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + (z - z')\mathbf{e}_z$, $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. 并设 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$, 亦即 ∇ 为对场点求偏微分, ∇' 为对源点求偏微分, 求 ∇r 和 $\nabla' r$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \nabla r &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r \\ \nabla' r &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'} \right) [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} = -\frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

故有

$$\nabla' = -\nabla \quad (1.2.29)$$

1.2.6 哈密顿算符在球坐标系和柱坐标系中的表示

(1) 球坐标系: 如图 1.1.2 所示, $x = r \sin \theta \cos \alpha$, $y = r \sin \theta \sin \alpha$, $z = r \cos \theta$, 体积元 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\alpha$, 则

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (1.2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \quad (1.2.31)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\alpha) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} \right] + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

(2) 柱坐标系: 如图 1.1.3 所示, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $z = z$, 体积元 $dV = r dr d\alpha dz$, 则

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \varphi + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.2.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.2.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial z} A_\alpha \right) + \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right] \quad (1.2.35)$$

1.2.7 拉普拉斯算符在球坐标系和柱坐标系中的表示

在球坐标系中

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \quad (1.2.36)$$

在柱坐标系中

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1.2.37)$$

例 1.2.4 电偶极子和电偶极线的电势 φ 可以表示为 $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ 和 $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2}$, 磁偶极子的矢势 $\mathbf{A}$ 可表示为 $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$, 其中 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{m}$ 为常矢量, $\mathbf{r} \neq 0$, 求 $\nabla \varphi$ 、 $\nabla \times \mathbf{A}$.

解 根据 ∇ 的微分性, 由式 (1.2.15) 有

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{p}$$

再根据式 (1.2.12) 和式 (1.2.18) 有

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \quad (1.2.38)$$

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{r^2} - \frac{2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^4} \quad (1.2.39)$$

由式 (1.2.14) 和式 (1.2.17) 有

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} &= \nabla \times \left[\frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right] = \nabla \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \\ &= -\frac{3\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{1}{r^3} [\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r}] \\ &= -\frac{3}{r^5} [\mathbf{m} r^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}] + \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \\ &= \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

若在球坐标系中, $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z = p(\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$, 则式 (1.2.38) 可表示为

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{p}{r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$$

若在柱坐标系中, $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_x = p(\mathbf{e}_r \cos \alpha - \mathbf{e}_\alpha \sin \alpha)$, 则式 (1.2.39) 可表示为

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) = -\frac{p}{r^2} (\mathbf{e}_r \cos \alpha + \mathbf{e}_\alpha \sin \alpha)$$

如果用球坐标系和柱坐标系中 ∇ 算符的表示式 (1.2.30) 和式 (1.2.33), 可以在相应坐标系中重新求得式 (1.2.38) 和式 (1.2.39) 分别为

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \frac{p \cos \theta}{r^2} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p \cos \theta}{r^2} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = -\frac{p}{r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$$

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) = \nabla \frac{p \cos \alpha}{r} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p \cos \alpha}{r} \right) + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{p \cos \alpha}{r} \right) = -\frac{p}{r^2} (\mathbf{e}_r \cos \alpha + \mathbf{e}_\alpha \sin \alpha)$$

1.3 拉普拉斯方程

拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.3.1)$$

许多实际问题, 如工程类问题、波场类问题等, 都会面临拉普拉斯方程 (1.3.1) 的求解问题, 所以对式 (1.3.1) 的求解是很现实的, 它一般是三元二阶线性偏微分方程. 本节就探讨拉普拉斯方程 (1.3.1) 在球坐标系和柱坐标系中的解 (不同的坐标系选择主要由边界形状制约), 而且仅限于本书的需要. 更广泛的讨论请读者参见相应的数学教材.

1.3.1 球坐标系中的拉普拉斯方程

在球坐标系中, 拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1.3.2)$$

一般地, $\varphi = \varphi(r, \theta, \alpha)$. 求解式 (1.3.2) 的通用方法是分离变量法. 我们只考虑具有轴对称性的问题, 即 $\varphi = \varphi(r, \theta)$, 这样拉普拉斯方程就为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi \right) = 0 \quad (1.3.3)$$