

前言

从 2018 年秋季起, 我开始担任浙江大学物理学院本科生一年级专业入门课“力学”的教学工作. 此外, 从 2021 年春季起, 我又开始负责物理学专业“四大力学”之首“理论力学”中“分析力学”部分的教学任务.

这些教学工作使我有充足的时间重新审视对物理学基本内容的理解. 我时常从科研工作中抽身, 尝试站在物理学初学者的角度, 思考应该教什么、如何教. 身处人工智能 (AI) 方兴未艾的时代, 基础课程的教学面临一种尴尬: 若只是照本宣科, 不如“深度搜索”; 若仅停留在“心灵按摩”, 岂有专业可言! 把教学结合到科研中去, 对于一直做基础理论研究工作的我是难得的提升专业能力的机会. 通过备课和撰写讲义, 我得以深刻理解物理名词的起源、内涵、表达习惯和其隐喻, 从而深入体会力学乃至整个物理学在历史发展中一路连续“可微”. 经典力学课的教学工作, 极大地丰富了我量子控制和量子信息基本理论方面的专业积淀. 反过来, 我的科研工作也试图为力学作为整个物理学乃至前沿科研工作的基础做出个性化的教学注解. 这是一件让人幸福的事情.

编写本书的目的之一是, 激起未来的同行对物理学研究的发自灵魂深处的兴趣. 遗憾的是, 我不善于出题, 本书未必能够帮助大家获得高的绩点. 但是, 我努力让它成为一座从做题到思考的桥梁、一个改造思维方式的契机、一个通往物理学各领域的网络、一个从单纯学习到思想创造的起点. 目的之二是, 为当下的同行提供一点业余时间里的非功利话题. 诚然, 那些创造或者推动物理学前进的伟大人物无法简单复制或模仿. 但是, 如果我们能够花费一些时间追随伟大人物的思考方式, 那么我们会慢慢站起来平视他们, 并有机会成为他们中的一员. 经由微积分彻底改造后的力学, 不仅是物理学的基础, 也是物理学的核心本质; 它不仅提供了物理学研究的范式, 而且蕴含着未来物理学的核心思想. 如果我们能够把各自研究领域变成力学的模样, 那么我们的工作便真正拥有了伽利略、牛顿、麦克斯韦和爱因斯坦的“灵魂”.

本书尽可能使用平实的语言, 但是自然科学是严谨的, 读者不能像读小说那样去读物理学. 当遇到“请自行证明”这样的话时, 的确需要动笔计算或验证. 当遇到自己不熟悉的专业物理或数学名词时, 的确需要动手或利用 AI 找答案. 对于每一个推导, 最好能够耐心地独立重复一遍, 同时要认真思考每一步的前提和

内涵. 除了逻辑完整性和自洽性, 阅读物理书重在思考概念的前因、后果、限制条件、现象背后的物理意义, 以及物理现象之间的联系. 对于初学者而言, 只有现在认真梳理并打通基本逻辑链条, 将来才有可能掌握更多、更专业、更具体的物理学方法, 在面对前沿进展时可观其大略, 不致迷失方向.

本书由本人读书笔记和教学讲义整理而成, 部分零散内容因为记忆缘故无法提供具体出处, 只能提供关键词, 望读者见谅. 本人亦不会主张对这些零散内容享有知识产权.

感谢我的学生金铸耀、章陈一、陈鹏通读了全稿, 指正多处笔误. 感谢蒋天昊同学帮助绘制了大部分示意图的初稿. 感谢上海交通大学物理学院的吕智国老师提出的宝贵意见. 感谢科学出版社龙嫚嫚编辑提出的修改意见.

鉴于编者水平有限, 引喻失义在所难免, 恳请专家和读者批评指正.

编 者

2026 年 1 月

目 录

前言

第 0 章	数学准备	1
0.1	矢量	2
0.2	导数、微分、积分	10
0.3	复数	25
0.4	对称性及其他	29
第 1 章	物理准备	31
1.1	什么是力学	33
1.2	量纲	37
1.3	坐标系	43
第 2 章	质点运动学	49
2.1	一维运动	51
2.2	二维运动	53
2.3	自然坐标系	63
2.4	运动学的协变性	67
第 3 章	牛顿动力学	71
3.1	牛顿动力学定律	72
3.2	常见力	81
3.3	常用力学模型	93
第 4 章	动量定理与非惯性系	100
4.1	多质点系统	101
4.2	变质量物体的运动	110
4.3	惯性系与非惯性系	114
第 5 章	能量守恒与保守系统	127
5.1	动能与做功	130
5.2	保守系统中的动力学	135
5.3	保守系统中的机械能守恒及其应用	139
5.4	广义碰撞力学	151

第 6 章 刚体与转动	161
6.1 刚体的转动惯量	163
6.2 力矩、力矩方程、力学平衡体系	170
6.3 角动量和角动量守恒	174
6.4 刚体的定轴转动	187
第 7 章 振动与波动	194
7.1 振动	195
7.2 阻尼振动	205
7.3 简谐振动近似与合成	210
7.4 波动	220
7.5 波动的相干叠加	232
7.6 多普勒效应	239
第 8 章 狭义相对论	245
8.1 光速测量	247
8.2 洛伦兹变换	254
8.3 狭义相对论的时空观	260
8.4 相对论质能方程	270

第0章

数学准备

自然之书永远展现在我们眼前，但若不懂其书写所用的语言与符号，我们便无法理解它。这本书是用数学语言写就的。

——伽利略

数学在自然科学中难以解释的有效性，近乎一种奇迹。

——维格纳

对不懂数学的人而言，要传达自然之美，那种最深邃的美，实在困难。

——费曼

物理学的核心是对自然现象的直觉和理解，数学是表达这些理解的工具，然而物理学或力学的数学准备是没有穷尽的。尽管数学对物理学的影响非常深刻，但物理学的根基是思想和实验。费曼曾说“如果所有数学知识突然消失，物理学将仅仅倒退一周”，这绝非贬低数学，而是暗示：即使没有现成的数学工具，物理学家也能通过实验和逻辑重新构建需要的数学体系（比如微积分在牛顿时代的发展）。本章的目的是提供一些基本的必要的数学工具，使得初学者可以自主开启真实的物理学或力学的探索之旅。随着时间推移，读者可以边学习物理边提升数学能力。本章尽量使用符合现代物理学规范的标记和符号，可能不符合数学专业的要求，相比于数学教材也可能不够完备，但对物理初学者而言，已经足够严谨与自洽。数学和物理学的相互影响远比本书涉及的更为复杂。在大多数有记录的科学史中，数学、力学、物理学并不是分开的学科。古希腊人、古埃及人、古巴比伦人均认为人类生活在一个距离、时间、重力以某种方式运行的世界中。牛顿可能是为了构建现代物理学而开创新数学领域的第一人，这一数学工具就是微积分。

本章内容大致分为矢量、微积分、复函数三个部分，内容可能有所穿插，也可能用力学领域之外的物理学案例进行展示和说明。作者默认读者的数学水平大

致能顺利通过国内普通高中学业水平考试（学考或会考），如果在普通高等学校招生全国统一考试（高考）中数学和物理都能及格则更好！少部分讲解为论述方便，会使用读者不太熟悉的专业词汇和常识，但基本都可以通过自行咨询人工智能得到较为正确的解答。

物理学专业的新生可能会因为高等数学的引入而对经典力学产生畏难情绪，部分学生甚至会提出第二学期再开设专业课的“非专业要求”。其实大可不必，因为在牛顿和莱布尼茨之前，欧洲人的数学知识和国内高中生差不多，其物理学知识大约是初步掌握了一些科学实验方法，勉强能用光学望远镜获得天文数据，能用显微镜观察微小动植物。牛顿和莱布尼茨创立的微积分体系为受到零散科学启蒙的知识界提供了认识世界的系统性工具。以伽利略、伯努利家族、欧拉、托马斯·杨、拉格朗日、拉普拉斯为代表的学者，是近代数学与经典物理学的奠基者与理论开创者，即便由于时代和条件的限制，他们在当时的认知范围内似乎仅能达到如今“高中至本科数学和物理学”的水平，我们也绝不能认为自己和他们是一样的——注意“知识”不等于“能力”。想想看，发明规则的人和使用规则的人或者启蒙的人和被启蒙的人之间的差距有多大！作为有网络和人工智能加持的现代人，学习物理学和数学是极其舒服的：想要粗浅理解，就去学习几百年来被反复打磨的物理和数学规则；想要有所进益，有无数前人犯过的错、迈过的坎可资借鉴。另一个学习经典力学的理由是，它为读者同步学习高等数学、数学分析、线性代数提供了无与伦比且简单易懂的案例。

0.1 矢量

开宗明义，矢量（vector）不能简单等同于“既有大小又有方向的量”。此概念接近于有向线段。矢量表示位置点的差（既有大小又有方向的信息），在数学上是一个由线性运算定义出来的量。矢量可以进一步定义出大小和方向，但有大小和方向的线段不一定可以定义矢量。矢量代数可用来定义物体在三维空间中的瞬时速度和瞬时加速度，并计算力场对沿任意轨迹运动的物体所做的功。矢量代数的根本宗旨是将三维空间内的欧几里得几何的命题转换为简便的代数结构。牛顿先在动力学上提出力的平行四边形定则（强调了力的独立作用原理），然后建立了矢量的概念，而不是用数学上已有的矢量概念去描述力。矢量的性质完全由其大小和方向决定，在平直空间中具有空间平移不变性。

矢量的加法源于平行四边形定则（图 0.1），且具有可交换性。其可表述为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (0.1)$$

想象用两个不同方向的力（描述为矢量 $\mathbf{a}$ 和矢量 $\mathbf{b}$ ）同时作用于同一质点，它们

因此产生的力学效应（质点对力的响应）与通过上述矢量加法规则合成的单个力（矢量 $\mathbf{c}$ ）作用于同一质点是完全一样的（实验上不可区分）。这一点不仅是理论推导的逻辑前提，而且是被无数实验验证的客观事实。历史上，牛顿正是通过思考力的合成效应，进而提出了牛顿第二定律。

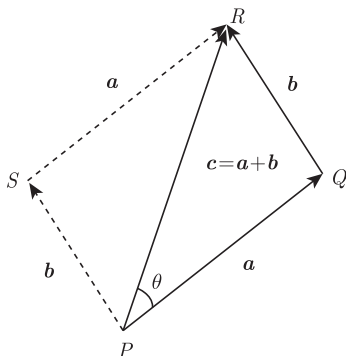


图 0.1 矢量及其加法的平行四边形定则

如果在三维空间或二维平面上用几何作图的方式描述矢量加法，那么其规则就是“首尾相接”。以图 0.1 为例， $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ 。为便于理解该规则，不妨考虑 P 、 Q 、 R 是三角形的三个顶点，它们构成的矢量包括 $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ 、 $\overrightarrow{QR} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ 、 $\overrightarrow{RP} = \mathbf{P} - \mathbf{R}$ 。某些教科书是在规定坐标原点 O 的前提下，将矢量定义为 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ ，但其实没有必要，且有循环论证的嫌疑。这里强调矢量是由空间上点的差定义出来的几何概念，而不依赖于参考点和坐标系。根据该定义，有代数结果

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} + \mathbf{R} - \mathbf{Q} + \mathbf{P} - \mathbf{R} = 0 \quad (0.2)$$

以上运算在物理上对应三力平衡条件。在一维空间中引入矢量是冗余的，因为初等算术和代数够用了。一旦加法被定义，只要引入负号，就没有必要再定义减法。这对初等算术和代数适用，对矢量也适用。负号的物理意义是与正方向或某个指定矢量方向相反，操作意义是将矢量旋转 180° ，即弧度制 π 。将矢量首尾相接就可以缩并至合矢量为零： $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$ 。根据表达式 (0.1)，矢量 $\mathbf{c}$ 和矢量 $\mathbf{a}$ 或矢量 $\mathbf{b}$ 之间的差可以写为

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{a} \quad (0.3)$$

矢量的尺度（通俗一点就是长度）表示它所代表的物理量的大小。在标度变换（scale transformation）下矢量长度会伸缩，因此需要用到矢量与标量的乘法。

该乘法满足交换律和分配律

$$\begin{aligned}
 n(m\mathbf{a}) &= nma = m(n\mathbf{a}) \\
 (n+m)\mathbf{a} &= n\mathbf{a} + m\mathbf{a} \\
 n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= n\mathbf{a} + n\mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{0.4}$$

其中, n 、 m 为任意实数; $n\mathbf{a}$ 表示尺度变化了 n 倍的另一个矢量, 它平行于原矢量 $\mathbf{a}$. 如果 $|n| > 1$, 则尺度变大; 如果 $|n| < 1$, 则尺度变小; 如果 $n < 0$, 则矢量由平行变为反平行; 如果 $n = 0$, 则得到零矢量. 任意非零矢量都可以定义出一个单位矢量: $\hat{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{a}/a$ ($\equiv$ 表示定义而不是相等关系), 其方向就是原矢量的方向, 其长度 (尺度) 为 1.

矢量是完全独立于坐标系的存在, 但把矢量表示在特定坐标系下, 可能会方便后续的代数运算. 如果将矢量 $\mathbf{r}$ 的起点固定在坐标系原点, 那么在笛卡儿坐标系 (直角坐标系) 下 (图 0.2), 矢量及其长度可以分别表示为

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z, \quad r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{0.5}$$

其中, x 、 y 、 z 为矢量终点 P 在各轴上的坐标; $\hat{\mathbf{e}}_x$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_y$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_z$ 分别表示沿着 x 、 y 、 z 方向的单位矢量, 也可表示为下列三变量数组:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_x \equiv (1, 0, 0) \\ \hat{\mathbf{e}}_y \equiv (0, 1, 0) \\ \hat{\mathbf{e}}_z \equiv (0, 0, 1) \end{cases} \tag{0.6}$$

因此, 对于任意三维矢量, 以下两种表示方法是等价的:

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{e}}_x + a_y\hat{\mathbf{e}}_y + a_z\hat{\mathbf{e}}_z = (a_x, a_y, a_z) \tag{0.7}$$

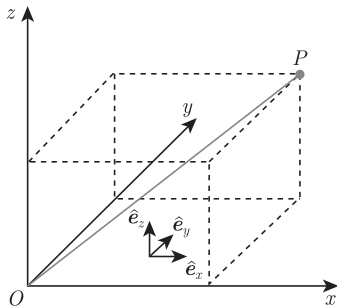


图 0.2 矢量的直角坐标系表示

三维矢量加法也可以表示为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z) \quad (0.8)$$

所以在物理上，有时为方便起见，可以用矢量分量的方式同步对多个变量进行相似操作。但应注意的是：这些变量或其组合未必构成真实的物理矢量。读者不妨想一下，任意维度空间中的矢量该如何表示。

费曼给出定义：标量（scalar）是在坐标变换下保持不变的量。根据该定义，矢量的模长就是标量，在物理上对应空间任意两点之间的距离（该距离通过勾股定理或者三维空间的广义勾股定理得到，又称为欧几里得范数）。矢量的分量就不一定是标量了。虽然很多物理量（如温度、能量、质量、电荷）与坐标系的选取无关，但并不影响费曼的这一标量定义的正确性。

假设矢量 $\mathbf{r}$ 的终点在旧坐标系下为 (x, y, z) 。如图 0.3 所示，将旧坐标系以 z 轴正向为转轴正方向（右手螺旋或逆时针）旋转 θ 角。在得到的新坐标系下， $\mathbf{r}$ 的终点为 (x', y', z') ，那么不难发现

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z \end{pmatrix} \quad (0.9)$$

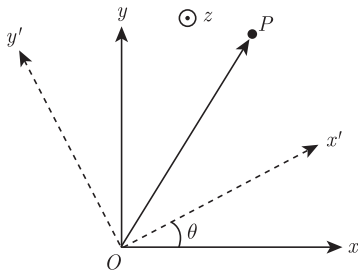


图 0.3 直角坐标系的旋转

根据表达式 (0.5)，可知

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (0.10)$$

因此矢量的长度，即起点到终点的距离，确实符合标量的物理定义。任何距离的计算，以及以某些求积方式消去方向的相关运算，都可能得到标量物理量。但是，

并不是所有求积运算得到的数量（有大小无方向）都可以视作标量物理量。比如以下定义：

$$\mathbf{a} \% \mathbf{b} \equiv a_x b_z + a_y b_x + a_z b_y \quad (0.11)$$

考虑两个单位矢量： $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ 和 $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$ ，根据上述定义可得 $\mathbf{a} \% \mathbf{b} = 1$ 。然而，考虑将旧坐标系以 z 轴正向为转轴、逆时针转动 $\pi/4$ 得到新坐标系，经简单计算可得 $\mathbf{a} \% \mathbf{b} = 1/2$ （具体推导过程作为一个小练习留给读者自行验证）。这个依赖于坐标系的结果表明，上述定义不是一个好的获得标量的运算定义。

根据表达式 (0.5)，矢量内积（又称标量积）的正确定义是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (0.12)$$

其具有分配律和交换律

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (0.13)$$

如图 0.1 所示，如果矢量 $\mathbf{a}$ 按照右手螺旋定则逆时针转动 θ 角后与矢量 $\mathbf{c}$ 平行，那么

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = ac \cos \theta, \quad a = |\mathbf{a}|, \quad c = |\mathbf{c}| \quad (0.14)$$

事实上这就是余弦定律。以上结果请读者自行检验。因此，当 $\theta = \pi/2$ 时， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ ，此时矢量 $\mathbf{a}$ 与矢量 $\mathbf{c}$ 相互垂直，反之亦然。

考虑图 0.1 中的三角形 PQR ，其中 $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{PR} = \mathbf{c}$ ，则根据矢量加减法的定义，有 $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ 。假设矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 之间夹角为 θ ，逐项对比以下两个等价的表达式：

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) &= a^2 + c^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2 - 2|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\cos \theta \end{aligned} \quad (0.15)$$

就可以自动得到表达式 (0.14)。以上推导中应用了矢量内积的交换律。常见的矢量内积公式还有

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &\leq a + b \\ |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &\leq ab \\ V(\mathbf{r}) &= m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (0.16)$$

以上三式依次为闵可夫斯基三角形不等式（俗称两边之和不小于第三边）、施瓦茨不等式、物体重力势能。

与标量不同，矢量可以定义多种乘法。除了内积这种对称（可交换的）乘法之外，物理上常用的**矢量积**（也称**叉乘**）是一种**反对称乘法**。也就是说，交换乘法的自变量会导致结果多出一个负号，且其结果是另一个矢量。其定义为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \mathbf{c} \quad (0.17)$$

令 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是图 0.4 中 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 根据右手螺旋定则得到的新矢量。请读者根据矢量内积的定义证明： $\mathbf{c}$ 必然垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 。

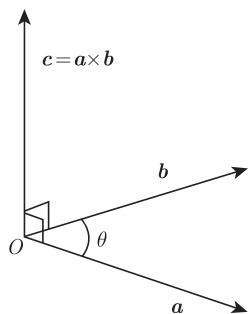


图 0.4 矢量积（叉乘）示意图

使用式 (0.9) 中的坐标变换可以检验所得到的矢量结果是否合理。在新坐标系下，矢量 $\mathbf{c}$ 的 x 坐标分量为

$$\begin{aligned} c_{x'} &= a_{y'} b_{z'} - a_{z'} b_{y'} \\ &= (-a_x \sin \theta + a_y \cos \theta) b_z - a_z (-b_x \sin \theta + b_y \cos \theta) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \cos \theta + (a_z b_x - a_x b_z) \sin \theta \\ &= c_x \cos \theta + c_y \sin \theta \end{aligned} \quad (0.18)$$

读者可自行检验其余两个分量。上述结果表明，矢量积的定义与坐标系的旋转是自洽的，它得到的矢量（至少在欧几里得范数的意义上）不会随坐标变换而改变其物理性质。

从矢量积的反对称性： $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ，可以挖掘一些有趣且有用的性质，比如

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{a} &= -\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0 \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &\neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \\
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= 0
\end{aligned} \tag{0.19}$$

如果默认矢量积的优先权高于内积，则上式最后一个表达式中的括号可以去掉。在图 0.1 中，矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的矢量积的绝对值代表了它们构成的平行四边形 $PQRS$ 的面积，其中 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \mathbf{b}$ 。这里重申了矢量的平移不变性。与平行四边形面积相关的证明如下：

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta = (ab \sin \theta)^2
\end{aligned} \tag{0.20}$$

其本质显然就是正弦定理。因此， $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的物理意义是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 张开的平行四边形的有向面积，其方向同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，故而可借助矢量积构造出三维空间的正交归一化基底。比如，已知平面上相互垂直的单位矢量 $\hat{\mathbf{e}}_x$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_y$ ，则利用矢量积可以得到 $\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y$ 。不难发现： $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ 构成右手螺旋正交基底。一切三维矢量均可以表示为它们的权重叠加。

从表达式 (0.20) 的推演可以发现，矢量的两种乘积可以统一表达为

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{0.21}$$

从而可以导出其长度的平方

$$(\mathbf{ab})^2 = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \tag{0.22}$$

矢量积的更多性质包括

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}
\end{aligned} \tag{0.23}$$

我们鼓励读者从代数和几何两个角度去挖掘这些表达式的含义. 假如读者具备线性代数的基础知识(矩阵、列向量及其乘法规则), 不难发现矢量积的另一种表示

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = W_a \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (0.24)$$

在矢量积的意义下, 上式左边的矢量 $\mathbf{a}$ 等价于一个反对称矩阵(张量) W_a . 对照表达式(0.17), 可知表达式(0.24)中的计算规则是 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_j (W_a)_{ij}(\mathbf{b})_j$,

其中单下标 i 表示矢量的第 i 个分量, 双下标 ij 表示矩阵第 i 行第 j 列的元素.

本节最后需要指出的是: 矢量可以描述任何符合矢量计算规则的概念(这句话看上去好像是循环逻辑, 但包括矢量在内的许多数学物理概念的定义本身确实代表了相应的运算规则), 而根据其所在(物理的或抽象的)空间获得实际意义. 建议物理学专业的学生至少要掌握矢量在线性代数中的基本计算规则, 这在今后的物理课程学习中将大有裨益. 我们在这里提供线性代数中二维和三维矩阵的行列式计算方法, 因为在本书后续章节中会有所应用.

如果将矩阵中的括号替换为绝对值符号, 就意味着计算其行列式. 对于 2×2 矩阵而言, 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (0.25)$$

其中每个元素的第一个下标表示所在行、第二个下标表示所在列. 这个结果可以简单理解为主对角线元素之积减去副对角线元素之积. 对于 3×3 矩阵而言, 我们有

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned} \quad (0.26)$$

第一行中三个 2×2 子矩阵称为相应元素 (a_{11}, a_{12}, a_{13}) 的余子式. 借助矩阵与行列式的概念, 就可以直接写出矢量积的表达式(0.17), 无须刻意记忆:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (0.27)$$

结合上述矢量积的行列式表达以及矢量积的物理意义 (0.20), 不难发现: 对于 xy 平面内由 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 张开的平行四边形 (其中 O 为原点, A, B 为任意两点), 其面积可以表示为 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{pmatrix} \quad (0.28)$$

的行列式的绝对值. 其中 (x_A, y_A) 以及 (x_B, y_B) 分别对应 A, B 两点的平面坐标. 结合了内积和矢量积的三重积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 等价于如下行列式:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (0.29)$$

的绝对值. 请读者自行验证其物理意义是由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 张开的平行六面体的体积 (图 0.5).

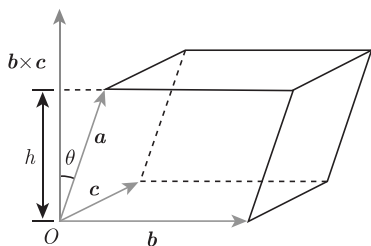


图 0.5 利用矢量计算平行六面体体积的示意图

有关矢量代数的更多数学、物理内容,感兴趣的读者可以自行阅读哈密顿 (W. R. Hamilton) 关于标量、矢量、四元数的理论,格拉斯曼 (H. G. Grassmann) 关于线的代数理论,以及几何代数 (克利福德代数). 更一般的矢量理论能够让我们获得更高更普适的观点,进而在物理学更为深入的学习和研究中发挥更重要的作用.

0.2 导数、微分、积分

简单而言,物理学是研究物理量或力学量变化的学科. 力学的基本问题是研究物体的机械运动 (变化). 在牛顿之前,研究物体运动的顺序是,从轨迹分析其速度,从速度分析其加速度. 在牛顿之后,由于微积分和微分方程的发展,上述研究顺序颠倒过来,变成了从加速度 (也就是物体对力的响应) 到速度,再从