



前言

PREFACE

实变函数论以 Lebesgue 测度与积分为核心,将数学分析的研究对象从连续函数拓展至可测集上的可测函数,构建了现代分析学的理论基础.与传统的 Riemann 积分相比,Lebesgue 积分采用“分割值域而非定义域”的革命性思想,恰如高等教育改革需要突破固有范式,从新的维度出发解决复杂问题.这种思想转变正如著名数学家 Lebesgue 所作的生动比喻:“假如我欠人家一笔钱,现在要还.若按钞票面值大小分类计算总值再相加,这是 Lebesgue 积分思想;若按取钱顺序逐一累加,则是 Riemann 积分思想.”这一理论的精髓在于其严谨的公理化体系和深刻的集合论思想,涉及集合基数、点集拓扑、测度构造、可测函数空间等核心内容,为学生开启了现代数学之门.它不仅是调和分析、泛函分析、概率论等现代数学领域的必备基础,更是培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力和数学严谨性的核心载体.

党的二十大报告强调“教育、科技、人才是全面建设社会主义现代化国家的基础性、战略性支撑”.这一高瞻远瞩的论断为高等教育发展指明了方向——高等教育必须成为科技第一生产力、人才第一资源、创新第一动力的战略结合点.在这一时代背景下,作为现代分析数学基石的实变函数课程,肩负着培养基础学科拔尖人才、塑造科学思维范式、服务科技创新需求的重要使命.

实变函数在数学专业的本科课程体系中具有承上启下的关键作用,是进入现代数学重要的基础课程之一,为培养学生的抽象思维、逻辑推理和独立研究能力提供必要的训练.本书突出理论的严谨性与系统性,同时关注核心概念与定理在相关领域的应用.特别对微积分基本定理的高维形式作了深入展开,体现出实变函数作为现代分析基础课程的重要作用.书中还适当引入了测度论中的部分前沿内容,以拓宽学术视野.

本书是为数学类专业本科生开设的实变函数课程编写的教材.其宗旨是以精炼的篇幅,系统讲授实变函数最核心的基础理论,使学生掌握后续学习(尤其是泛函分析)所必需的知识.内容设计力求在一学期(约 18 周,每周 4 课时)内完成主体教学任务.全书共 7 章:第 1 章是预备知识,讲述集合的基本性质;第 2 章是 Lebesgue 测度,讲述点集的 Lebesgue 外测度,可测集与 Lebesgue 测度;第 3 章

是可测函数,讲述可测函数的定义与性质,可测函数列的收敛,可测函数的逼近性质;第4章是 Lebesgue 积分,讲述可测函数的 Lebesgue 积分的定义与性质,可积函数列的积分与极限交换顺序定理,重积分与累次积分的关系;第5章是微分与积分,讲述不定积分的微分,单调函数的可微性,微积分基本定理成立的充要条件;第6章是 L^p 空间,讲述 L^p 空间的基本性质;第7章是现代拓展,讲述抽象的测度与积分,一般测度空间上的测度与积分理论, Hausdorff 测度和分形维数. 本书前6章涵盖了数学专业各方向共同所需的核心知识,构成了现代分析数学的基础. 第7章则提供了面向分析学相关方向(如偏微分方程、动力系统等)的进一步理论拓展.

兰州大学的实变函数课程是甘肃省高等学校省级一流课程,本书是我们在兰州大学多年从事实变函数课程教学的经验积累基础上,精心提炼总结编写而成的. 具体分工如下:孙红蕊老师负责编写第1章(集合论)、第3章(可测函数)、第4章(Lebesgue 积分)和第6章(L^p 空间);杨四辈老师负责编写第2章(Lebesgue 测度论)和第5章(微分与积分理论);李新华老师负责编写第7章(抽象测度与积分).

本书获得兰州大学教材建设基金资助. 在本书付梓之际,谨向关心和支持本书编写工作的兰州大学教务处、数学与统计学院的领导与同事们致以衷心的感谢!感谢他们在编写过程中给予的热情鼓励和鼎力支持.

限于编者水平,书中疏漏与不足之处在所难免,恳请使用本书的师生和同行专家不吝批评指正,以便我们在今后修订中不断完善.

编 者

2026 年 1 月

目录

CONTENTS

前言

第 1 章 预备知识	1
1.1 集合的基本性质	1
1.1.1 集合的定义与运算	1
1.1.2 集合列的上、下极限集	4
1.2 集合的基数	7
1.2.1 映射	7
1.2.2 集合的基数	9
1.3 集合的拓扑性质	14
1.3.1 开集 闭集 Borel 集	14
1.3.2 Cantor 集	20
1.3.3 连续函数的延拓	25
习题 1	28
第 2 章 Lebesgue 测度	31
2.1 点集的 Lebesgue 外测度	31
2.2 可测集与 Lebesgue 测度	37
2.3 不可测集	47
习题 2	48
第 3 章 可测函数	50
3.1 可测函数的定义与性质	50
3.2 可测函数列的收敛	58
3.3 可测函数的结构与 Luzin 定理	65
习题 3	68
第 4 章 Lebesgue 积分	70
4.1 非负可测函数的积分	70
4.1.1 非负可测简单函数的积分	70
4.1.2 非负可测函数的积分	72

4.2	一般可测函数的积分	77
4.3	Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系	89
4.4	Fubini 定理与 Tonelli 定理	93
4.4.1	Fubini 定理	94
4.4.2	积分的几何意义	99
4.4.3	卷积函数	102
	习题 4	105
第 5 章	微分与积分	110
5.1	不定积分的微分	110
5.1.1	Hardy-Littlewood 极大函数	111
5.1.2	Lebesgue 微分定理	115
5.2	函数的可微性与微积分基本定理	118
5.2.1	单调函数的可微性	118
5.2.2	有界变差函数	124
5.2.3	绝对连续函数与微积分基本定理	128
	习题 5	132
第 6 章	L^p 空间	134
6.1	L^p 空间的定义与不等式	134
6.2	L^p 空间的结构	138
6.2.1	$L^p(E)$ 是完备的距离空间	138
6.2.2	$L^p(E)(1 \leq p < \infty)$ 是可分空间	141
6.2.3	L^p 空间的范数公式	146
6.2.4	卷积	150
6.2.5	弱收敛	153
6.3	L^2 内积空间	158
	习题 6	161
第 7 章	现代拓展	164
7.1	抽象的测度和积分	164
7.1.1	测度	164
7.1.2	可测函数与积分	167
7.1.3	$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	169
7.2	Hausdorff 测度	177
7.2.1	定义与基本性质	177
7.2.2	等径不等式 $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$	183
7.2.3	函数与 Hausdorff 测度	189

7.3 分形维数	192
习题 7	194
参考文献	196

1.1 集合的基本性质

1.1.1 集合的定义与运算

集合论自 19 世纪 80 年代由康托尔 (Cantor) 创立以来, 现已发展成为独立的数学分支, 它的基本概念与方法已渗入各个数学领域, 在研究数学的逻辑基础时起着重要作用, 并成为近代数学的一个特征. 集合论是探讨集合的各种性质的, 它的初期工作与数学分析的深入研究密切相关, 并为发展实变函数理论奠定了基础.

集合如同几何学中的点一样, 是最基本的数学概念, 对它难以严格定义, 但可给予一种朴素的描述.

定义 1.1.1 集合 (set) 是指把具有一定性质的一组事物或对象视为一个整体时, 这一整体就称为集合, 而这些事物或对象就称为属于该集合的**元素**或**元**. 不含任何元素的集合称为**空集**, 记作 $\emptyset$. 只含一个元素 a 的集合记作 $\{a\}$, 称为**单元素集**. 约定以专用字母表示一些最常用的集合. 例如, 我们用字母 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示去掉 0 元素的自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集. 为了方便, 本书将 $+\infty$ 简记为 ∞ .

定义 1.1.2 任给集合 A , 它的子集合之全体记作 2^A , 称它为 A 的**幂集**.

易知若集合 A 含 n 个元素, 则 2^A 有 2^n 个元素.

在运用集合时, 经常需要考虑集合的“分解”与“合成”, 即将一复杂的集合分解为某些较简单集合的某种“组合”, 或利用已知集合构造特定的新集合, 这都依赖于集合的运算.

定义 1.1.3 给定集合 A, B , 令

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

其中 $A \setminus B$, $A \triangle B$ 分别称为 A 与 B 的**差集**、**对称差集**.

定义 1.1.4 设 Λ 是给定的一个集合. 对于每一个 $\alpha \in \Lambda$, 我们得到一个集合 A_α . 这样就得到许多集合, 它们的总体称为**集合族**, 记为 $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. 这里的 Λ 称为**指标集**. 当 $\Lambda = \mathbb{N}$ 时, 集合族也称为**集合列**, 简记为 $\{A_k\}$. 设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 定义其并集与交集分别为

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \text{存在 } \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \text{对一切 } \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}.$$

若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$, 则称集合列 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**, 记作 $A_k \uparrow A$, 其中 $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$. 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$, 则称集合列 $\{A_k\}$ 为**递减集合列**, 记作 $A_k \downarrow A$, 其中 $A = \bigcap_{k \geq 1} A_k$. 递增集合列与递减集合列统称为**单调集合列**.

例 1.1.1 若 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 则

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E : |f(x)| < k\},$$

$$\{x \in E : f(x) \neq 0\} = \{x \in E : |f(x)| > 0\}.$$

在讨论某一问题时, 通常有某个“最大”的集合 X 包含所有涉及的集合, 此时称 X 为**全集**或**基本集**, 全集的选择依情况而定, 不必处处一样. 在具体场合, 何者为全集通常不言自明, 仅当可能产生歧义时才作明确交代. 当 $A \subset X$ 时, 称 $X \setminus A$ 为 A 在 X 中的**补集**, 记作 A^c . 今后, 凡没有明显标出全集 X 时, 都表示取补集运算的全集 X 预先已知, 而所讨论的一切集合皆为其子集. 关于集合的运算有下述重要法则.

定理 1.1.1 (德摩根 (De Morgan) 法则)

$$(i) \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c.$$

$$(ii) \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c.$$

命题 1.1.1 设 $A, A_\alpha \subset X (\alpha \in \Lambda)$, 则成立以下等式:

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} (A \cup A_\alpha) \quad (\text{并对交的分配律}),$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} (A \cap A_\alpha) \quad (\text{交对并的分配律}).$$

在本书中, 集合运算大量地用于函数性质的研究. 利用集合运算分解一些与函数有关的复杂集合, 是必须掌握的基本技巧.

在举例说明之前, 首先作些记号约定, 它们将频繁地用于本书各章. 设 f 是集合 E 上的实值函数, 约定将 E 的子集 $\{x \in E : f(x) > a\}$ 记为 $\{f > a\}$. 在 E 自明而不需标注的情况下, 用较简单的记号 $\{f > a\}$ 是可取的, 这类记号尤其广泛用于概率论文献中. 仿照上述约定, 记号 $\{a < f \leq b\}$, $\{f_k \rightarrow f\}$ 分别表示 $\{x \in E : a < f(x) \leq b\}$, $\{x \in E : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)\}$, 其他类似.

下面看几个实例.

例 1.1.2 设 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \{f > 0\}$, $A_k = \{f > 1/k\}$ ($k \in \mathbb{N}$). 试用 A_k 表示集合 A .

解 “ $x \in A$ ”这件事可等价地表达为一系列不同形式:

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow f(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } f(x) > \frac{1}{k} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } x \in A_k. \end{aligned}$$

因此 $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$.

例 1.1.3 设 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是 E 上的实值函数列, $A = \{f_k \rightarrow f\}$, $A_{mk} = \{|f_k - f| < 1/m\}$. 试用 $\{A_{mk} : m, k \in \mathbb{N}\}$ 表示集合 A .

解 由极限的定义, 有

$$\begin{aligned} f_k(x) &\rightarrow f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得对 } \forall k \geq k_0, \text{ 有 } |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得对 } \forall k \geq k_0, \text{ 有 } x \in A_{mk}. \end{aligned}$$

因此

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_{mk}. \quad (1.1.1)$$

让我们将以上两例的方法总结一下: 若要得出给定集合 A 的某个分解式, 首先应利用相关知识及逻辑符号 “ $\forall$ ” “ $\exists$ ” 写出 “ $x \in A$ ” 的某个逻辑表达式, 然后将此表达式转译成一个集合运算的式子. 这样做时注意符号 “ $\forall$ ” 与 “ $\exists$ ” 分别对应交与并.

形如(1.1.1)的式子似乎很复杂, 但经常要用到. 为方便起见, 引进以下概念.

1.1.2 集合列的上、下极限集

定义 1.1.5 设 $\{A_k\}$ 是一集合列, 令

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \quad (1.1.2)$$

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \quad (1.1.3)$$

$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k, \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$ 分别称为集合列 $\{A_k\}$ 的上极限集与下极限集; 若它们相等 (记作 A), 则称 A 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记作 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ 或 $A_k \rightarrow A$, 此时称集合列 $\{A_k\}$ 收敛于 A .

下面给出集合列的上、下极限集的另一种描述, 它有时比(1.1.2), (1.1.3) 更好用.

定理 1.1.2 设 $\{A_k\}$ 为一集合列, 则

(i) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x: \text{对任一自然数 } j, \text{ 存在 } k(k \geq j), \text{ 使得 } x \in A_k\}.$

(ii) $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x: \text{存在自然数 } j_0, \text{ 使得对每个 } k \geq j_0, \text{ 都有 } x \in A_k\}.$

证明 (i)

$$x \in \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$$

$$\Leftrightarrow \text{对每个 } k, \text{ 有 } x \in \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$$

$$\Leftrightarrow \text{对每个 } k, \text{ 存在 } j \geq k, \text{ 使得 } x \in A_j$$

$$\Leftrightarrow x \text{ 属于 } \{A_k\} \text{ 中无穷多个集合.}$$

(ii)

$$x \in \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$$

$$\Leftrightarrow \text{存在 } k_0, \text{ 使得 } x \in \bigcap_{j=k_0}^{\infty} A_j$$

$$\Leftrightarrow \text{存在 } k_0, \text{ 使得对每个 } k \geq k_0 \text{ 都有 } x \in A_k$$

$$\Leftrightarrow x \text{ 至多不属于 } \{A_k\} \text{ 中有限多个集合.}$$

□

注 1.1.1 (i) 若 $\{A_k\}$ 为递增集合列, 则易知它必收敛且 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k \geq 1} A_k$;
若 $\{A_k\}$ 为递减集合列, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k \geq 1} A_k$.

(ii) 观察到 $\left\{\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right\}$ 与 $\left\{\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j\right\}$ 分别为递减集合列与递增集合列, 因此(1.1.2), (1.1.3)可改写为

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, \quad (1.1.4)$$

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j. \quad (1.1.5)$$

以上结论可与数列的上、下极限类比: 若 $\{a_k\}$ 是一实数列, 则对应于(1.1.2), (1.1.3), 有

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} a_j, \quad (1.1.6)$$

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} a_j. \quad (1.1.7)$$

利用集合列极限, 现在可将例 1.1.3 的结论(1.1.1) 写成 $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_{mk}$.

对于上、下极限集的运算, 易知下述事实成立.

设 $A_k \subset X (k \in \mathbb{N})$, 则

$$X \setminus \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (X \setminus A_k), \quad X \setminus \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (X \setminus A_k). \quad (1.1.8)$$

凡需要实现集合列的上极限集与下极限集互相转化时, 就应记起公式(1.1.8). 注意, (1.1.8) 与熟知的公式

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = - \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (-a_k), \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = - \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (-a_k)$$

恰好相对照.

例 1.1.4 若 $A_k = [k, \infty) (k \geq 1)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \emptyset$.

例 1.1.5 设 $\{f_k\}$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数列, 且满足 $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $x \in E$, $k = 1, 2, \dots$. 则对于给定的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\left\{x : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) > t\right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x \in E : f_k(x) > t\}.$$

例 1.1.6 设 $\{f_k\}$ 以及 f 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, $\varepsilon > 0$, 令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

则

$$\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k(\varepsilon).$$

定义 1.1.6 设 $A \subset X$. 在 X 上定义一函数 χ_A 为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

称 χ_A 为集合 A 的**特征函数** (characteristic function).

借助于特征函数, 可将集合之间的关系转化为相应的特征函数之间的数量关系. 特别地, 集合运算可转化为特征函数的相应运算. 基本的结论有

- (i) $A = \emptyset \Leftrightarrow \chi_A \equiv 0$; $A = X \Leftrightarrow \chi_A \equiv 1$.
- (ii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A \equiv \chi_B$; $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$.
- (iii) $A = \bigcup_i A_i \Leftrightarrow \chi_A \equiv \max_i \chi_{A_i}$.
- (iv) $A = \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \chi_A \equiv \min_i \chi_{A_i} = \prod_i \chi_{A_i}$.
- (v) $A = B^c \Leftrightarrow \chi_A = 1 - \chi_B$; $\chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$.
- (vi) $A = \varlimsup_{k \rightarrow \infty} A_k \Leftrightarrow \chi_A = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k}}$;
 $A = \varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k \Leftrightarrow \chi_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k}$;
 $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \Leftrightarrow \chi_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k}$.

以上结论的证明不难, 读者应能自行完成. 注意上述结论 (vi) 有力地证实了, 将 (1.1.4), (1.1.5) 与 (1.1.6), (1.1.7) 类比是理所当然的.

定义 1.1.7 设有集合 $X_1, \dots, X_n$, 称一切有序“元素对” $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (其中 $x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$) 构成的集合为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的**直积集**, 记作 $\prod_{i=1}^n X_i$ 或 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. 即

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

若 $X_i = X, i = 1, 2, \dots, n$, 则将直积集写作 X^n , 称它为 X 的 n 重积或 n 次幂.

直积集被广泛使用, 常见的例子如下.

(1) n 维欧几里得 (Euclid) 空间 $\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}$ 的 n 次幂, 即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)\}.$$

(2) $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点的全体, 即

$$\mathbb{Q}^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) : r_i \in \mathbb{Q} (1 \leq i \leq n)\}.$$

(3) $\mathbb{Z}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有整数坐标的点的全体, 即

$$\mathbb{Z}^n = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) : k_i \in \mathbb{Z} (1 \leq i \leq n)\}.$$

(4) 给定区间 $I, J \subset \mathbb{R}$:

$$I \times J = \{(x, y) : x \in I, y \in J\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中一矩形.

1.2 集合的基数

1.2.1 映射

在数学分析课程中, 我们已熟悉了一个或多个实变量的函数概念. 将其一般化, 就得到如下的映射概念.

定义 1.2.1 设 X, Y 是两个非空集. 若对每个 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称这一对应为**映射** (mapping). 若用 f 表示这一映射, 将与 x 对应的元素记作 $f(x)$, 于是 $y = f(x)$, 称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作 $f: X \rightarrow Y$, 或

$$f: X \rightarrow Y, \quad x \rightarrow f(x).$$

$y = f(x)$ 称为 x 在映射 f 下的**像**, x 称为 y 的一个**原像**. 以 Y^X 记从 X 到 Y 的映射之全体. 例如, $f \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ 就意味着 f 是 $[a, b]$ 上的一个实函数.

关于通常函数概念的许多术语与处理方法可以自然移用于映射情况. 例如, 对于定义 1.2.1 中的 f , 可以称 $f(x)$ 为 f 在 x 的“函数值”(它不必是数), 说“定义于 X 上, 取值于 Y 中”, X 就是定义域, 而 $\{f(x) : x \in X\}$ 是值域; 将 $X \times Y$ 的子集

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

称为 f 的**图形**. 设 $\mathcal{C}$ 是 2^X 的非空子集, 则任何映射 $\mu: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 $\mathcal{C}$ 上的**集函数**.

定义 1.2.2 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: Y \rightarrow Z$ 是两个映射. 任给 $x \in X$, 令 $h(x) = g(f(x))$, 则得到一个映射 $h: X \rightarrow Z$, 称它为 g 与 f 的**复合映射**, 记作 $g \circ f$, 即

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad x \rightarrow g(f(x)).$$

若 $A \subset X$ 是一非空集合, 则称映射 $A \rightarrow Y, x \rightarrow f(x)$ 为 f 在 A 上的**限制**, 记作 $f|_A$. 若 $F: X_1 \rightarrow Y$ 是另一个映射, $X \subset X_1$, 且当 $x \in X$ 时 $F(x) = f(x)$, 即 $F|_X = f$, 则称 F 为 f 的一个**延拓** (extension).

上面考虑映射 $f: X \rightarrow Y$ 时, 只涉及 X 与 Y 的元素之间的对应关系. 实际上, f 也建立了 X 与 Y 的子集之间的一定对应关系. 在本书中, 后者甚至更有意义. 准确的描述如下.

定义 1.2.3 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射. 任给 $A \subset X, B \subset Y$, 令

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

称 $f(A)$ 为 A 在映射 f 下的像; 称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的原像.

注 1.2.1 注意, 记号 $f^{-1}(B)$ 的使用与 f 的逆映射是否存在无关. 不过, 若 $f: X \rightarrow Y$ 是双射, 则 $f^{-1}(B)$ 就是 B 在逆映射 f^{-1} 下的像, 即

$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) : y \in B\}.$$

命题 1.2.1 给定映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, A, A_k \subset X, B, B_k \subset Y$ ($k \in \mathbb{N}$), $C \subset Z$, 则有以下结论成立:

- (i) $A \subset f^{-1}(f(A)), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- (ii) $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$.
- (iii) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
- (iv) $f(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k f(A_k), f(\bigcap_k A_k) \subset \bigcap_k f(A_k)$.
- (v) $f^{-1}(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k f^{-1}(B_k), f^{-1}(\bigcap_k B_k) = \bigcap_k f^{-1}(B_k)$.

证明 以证 (v) 为例, 其余是类似的. 任给 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_k B_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : f(x) \in B_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x \in f^{-1}(B_k) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_k f^{-1}(B_k), \end{aligned}$$

这得出 $f^{-1}(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k f^{-1}(B_k)$. $f^{-1}(\bigcap_k B_k) = \bigcap_k f^{-1}(B_k)$ 同理可证. □

命题 1.2.1 为“集合演算”提供了主要的公式. 值得注意的一个重要事实是: 在命题 1.2.1 (ii) ~ (v) 中, 涉及原像集的公式全为等式, 而对于像集却并非如此. 这使得处理原像的演算更为方便. 如在本书中将看到的, 连续函数与可测函数都可通过由原像表达的条件来刻画 (参看定理 1.3.12 与定理 3.1.3).

1.2.2 集合的基数

给定一集合 X 及某个与 X 中的元素有关的命题 P , 令 $A = \{x \in X : x \text{ 满足 } P\}$, $B = A^c$. 一个极有意义的问题是: P 在 X 上成立与不成立的可能性哪个更大? 这涉及集合 A, B 所含元素多少的比较. 对于有限集, 这一问题的解决是很简单的: 将 A, B 中元素个数数一下就行了. 不过也可以用另一个办法. 例如, 要判断教室内座位是否够坐, 只需让每个人都坐在座位上, 然后看看是否有空座位, 这一方法可推广到用于任何两个集合的比较.

定义 1.2.4 设 A, B 是两个集合, 若存在一个从 A 到 B 的双射, 则称 A 与 B 对等, 记作 $A \sim B$.

显然对等关系满足如下的性质.

(i) (自反性) $A \sim A$.

(ii) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

(iii) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

任何一个集合上满足自反性、对称性和传递性的二元关系称为这个集合上的一个等价关系. 于是集合的对等关系是一种等价关系.

例 1.2.1 (i) $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. (ii) $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

定义 1.2.5 设 A, B 是两个集合, 若 $A \sim B$, 就称 A 与 B 有相同的基数 (或势). 记 $|A|$ 为 A 的基数. 约定 $|\emptyset| = 0$. 若 A 是含 n 个元素的集合, 则 $|A| = n$. 有两种基数是最常见的: 一种是自然数集的基数, 记为 $\aleph_0$ (读作阿列夫 (Aleph) 零), 即 $|\mathbb{N}| = \aleph_0$; 另一种是实数集 $\mathbb{R}$ 的基数, 记成 c , 即 $|\mathbb{R}| = c$. 若存在一个从 A 到 B 的单射 (这相当于 A 对等于 B 的某个子集), 则约定 $|A| \leq |B|$. 如果 $|A| \leq |B| \neq |A|$, 则约定 $|A| < |B|$ (读作 $|A|$ 小于 $|B|$).

基数可看作是有限集元素个数的推广. 当 $|A| < |B|$ 时, 可以说“ B 含有比 A 更多的元素”. 基数不等式可以看作是自然数顺序关系的推广. 基数的大小关系, 如同自然数一样, 有以下基本结果.

定理 1.2.1 (康托尔-伯恩斯坦 (Cantor-Bernstein) 定理) 设 A, B 为两个集合, 若 A 与 B 的某个子集 B_0 对等, B 与 A 的某个子集 A_0 对等, 则 A 与 B 对等.

证明 不妨设 A_0, B_0 分别是 A, B 的真子集. 设 f 为 A 与 B 的子集 B_0 对等的双射, g 为 B 与 A 的子集 A_0 对等的双射. 记 $A_1 = A \setminus A_0, B_1 = f(A_1)$, 则 $A_1 \subset A, B_1 \subset B_0$, 依次定义

$$A_k = g(B_{k-1}), \quad B_k = f(A_k), \quad k = 2, 3, \dots$$

由于

$$A_1 = A \setminus A_0, \quad A_2 = g(B_1) \subset g(B_0) = A_0,$$

则 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 从而根据 $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2), f$ 是双射知 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. 又 $A_2 = g(B_1), A_3 = g(B_2)$, 则 $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, 因此 A_1, A_2, A_3 两两不交.

一般说来, 若已作出 $A_1, \dots, A_m$ 互不相交, 则由 $B_k = f(A_k)$ 知 $B_1, \dots, B_m$ 互不相交, 再根据 $A_{k+1} = g(B_k)$ 知 A_{m+1} 与 $A_1, \dots, A_m$ 互不相交. 由数学归纳法可知, 以上得到的集合列 $\{A_k\}$ 中任意两个集合不相交, $\{B_k\}$ 中也任意两个集合不相交. 从而可由

$$B = g^{-1}(A_0) \sim A_0, \quad B_k = g(A_{k+1}) \sim A_{k+1}, \quad A_{k+1} \subset A_0, \quad B_k \subset B, \quad k=1, 2, \dots$$

知

$$B \setminus \left(\bigcup_k B_k \right) \sim A_0 \setminus \left(\bigcup_k A_{k+1} \right) = A \setminus \left(\bigcup_k A_k \right); \quad (1.2.1)$$

可由

$$B_k = f(A_k), \quad k=1, 2, \dots$$

知

$$\bigcup_k B_k \sim \bigcup_k A_k. \quad (1.2.2)$$

因此由(1.2.1) 和(1.2.2)可得

$$A = \left(\bigcup_k A_k \right) \cup \left(A \setminus \left(\bigcup_k A_k \right) \right) \sim \left(\bigcup_k B_k \right) \cup \left(B \setminus \left(\bigcup_k B_k \right) \right) = B,$$

且其中 A 到 B 的双射 h 可定义为

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \bigcup_k A_k, \\ g^{-1}(x), & x \in A \setminus (\bigcup_k A_k). \end{cases} \quad \square$$

推论 1.2.1 设集合 A, B, C 满足 $A \subset B \subset C$, 若 $A \sim C$, 则 $A \sim B$.

例 1.2.2 $[a, b] \sim \mathbb{R}$. 这是因为易知 $(a, b) \sim \mathbb{R}$, 且有

$$(a, b) \subset [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

例 1.2.3 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. 例如, 存在双射 f :

$$f((i, j)) = 2^{i-1}(2j-1), \quad (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

这是因为任一自然数均可唯一地表示为

$$n = 2^p \cdot q \quad (p \text{ 为非负整数, } q \text{ 为正奇数}),$$