

前 言

党的二十届三中全会审议通过的《中共中央关于进一步全面深化改革、推进中国式现代化的决定》指出：“教育、科技、人才是中国式现代化的基础性、战略性支撑。”改革开放近半个世纪以来，我国的社会面貌已经发生了翻天覆地的变化，教育与科技发展水平也已得到很大提高。如何使我国的教育与科技有更大的发展，为我国社会向更高水平发展服务，是摆在每一位从事教育和科技工作的教研人员面前的光荣任务。

在这样的指导思想激励下，我们根据三十多年来讲授“数学分析 (I, II, III)”课程尤其是最近在中山大学理学院讲授该课程的教学实践，编写的《数学分析教程》(以下简称课本) 入选“首届广东省优秀教材 (高等教育类) 名单”，并对在该门课程习题课上讲授的内容进行总结整理，围绕学生学习重点难点做了一些扩充，分上、下两册编写成这套《数学分析习题课教程》。上册针对实数域的基本理论、数列的极限、一元函数的极限和连续性、一元函数的微分学及其应用，以及一元函数的积分学及其应用等内容的配套习题展开并有所拓展；下册针对无穷级数、函数序列和函数级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限和连续性、多元函数的微分学、多元函数的积分学等内容的配套习题展开并有所拓展。下面对本教程的编写思想做一些说明，并提出一些使用建议供读者参考。

一、例题丰富、数量较大。在本教程中，每堂习题课都以数学分析课本相应章节里需要学生重点掌握和比较难掌握的内容为主题进行讲解。读者不难发现，本教程讲解的例题十分丰富、数量庞大，很明显，如果教程中的每道例题都在课堂上讲解，则两个课时的习题课远远不够用。其实作者选编这些例题的初衷，并不是要求教师在课堂上全部讲授，是给使用者提供一个足够丰富的题库，使用教师只需按着课程进展有重点、有代表性地选讲其中一小部分即可，其余例题可作为学生自学内容，让学生通过自学，夯实基础，得以提升。例如，第 1 课“实数域和初等函数”，建议 1.1 节和 1.2 节共用一个课时，1.3 节单独用一个课时，而 1.4 节可以完全不在课堂讲授。其他各堂课也建议教师根据授课具体情况进行类似的选择取舍处理。

二、例题兼顾易、中、难三个层次，以中、难为主。当前，我国初等教育的水平已经有很大提高，大学一年级新生的知识基础非常扎实，为了适应这种教育形势，也为了响应把我国的人才培养和科技发展向更高水平推进的号召，作者对本教程题目做了如此设置。作者在《数学分析教程》课本中精心设置配备了一定数量的难度比较大的习题，虽然书末的参考答案和提示部分对所有难题的解法都做了提示，但是教学实践表明，许多题目的提示后面还藏有更深的技巧，这些技巧的破解往往既耗费精力又需大量时间，初学者可能没有那么多的时间去钻研。举个例子：本套习题课教程中的例 1.6

即课本习题 1.1 第 9 题的 (3) 小题, 从 (1.9) 推导出 (1.10) 的方法课本有提示, 但是如果不仔细思考, 会认为那里的提示有错误, 因为按那个提示做了之后, 如果不再对所得到的关系式进行进一步的变形, 其形式与 (1.10) 有较大差别. 这样的例子远不止一个.

三、给出尽可能详尽的解题过程, 引发思考. 虽然作者刚讲过这门课, 由于题目有难度, 但仍需耗费大量时间应对学生因理解题目的提示有困难而产生的很多问题. 因此, 写出这些较难题目的详尽解题过程很有必要. 另外, 把每一道题目的解题过程都清晰明白地写出来, 以便学习者与自己的解题思路、方法进行比较, 这应该对学习者的帮助. 必须说明的是, 本书所提供的每道题目的解题思路不一定是最佳的, 实践中经常有学生的解题思路比老师的解题想法更好的情况. 作者真诚地希望这套书能起到抛砖引玉的作用.

四、提供更好地理解 and 掌握数学分析的工具. 本套教程的编写目的是给自学数学分析课程的读者提供一个帮助他们更好地理解和掌握这门基础课程的工具. 因此除了经典题目外, 作者还新编排了一些习题. 这些习题与《数学分析教程》课本中的习题不重复, 读者认真学习将获得额外的收益. 若教师将本书作为习题课教材, 建议不用再额外布置习题, 可引导学生根据其学习进度选做教程中的题目.

本书在编写过程中得到了许多人的帮助. 鉴于人数很多且在课本的前言部分已经做了感谢, 这里不再另赘致谢. 限于作者的水平, 本书中的疏漏在所难免. 恳望读者对此给予最宽宏大度的谅解, 并真诚地希望随时得到批评指正. 作者谨在此致以诚挚的感谢.

作 者

2025 年 4 月

于中山大学深圳校区

目 录

前言

第 16 课	数项级数	1
16.1	无穷级数敛散性的定义与收敛级数的基本性质	1
16.1.1	根据定义分析级数的敛散性	1
16.1.2	无穷级数的基本性质	18
16.2	正项级数敛散性的判定	23
16.3	一般项级数敛散性的判定	44
第 17 课	数项级数 (续)	63
17.1	级数敛散性判定的进一步讨论	63
17.2	级数的重排和两个级数的乘积	73
17.3	级数对积分理论的应用	79
第 18 课	函数序列和函数级数	89
18.1	函数序列与函数级数的一致收敛	89
18.1.1	函数序列的一致收敛	89
18.1.2	函数级数的一致收敛	98
18.2	一致收敛函数序列极限函数与函数级数和函数的性质	111
18.2.1	一致收敛函数序列极限函数的性质	111
18.2.2	一致收敛函数级数和函数的性质	116
18.3	魏尔斯特拉斯逼近定理	129
第 19 课	函数序列和函数级数 (续)	138
19.1	函数序列的积分平均收敛	138
19.2	函数级数的积分平均收敛	153
第 20 课	幂级数	164
20.1	幂级数的收敛半径和收敛域	164
20.2	幂级数和函数的性质	173
20.3	函数的幂级数展开	180
20.4	幂级数的和	191
20.5	解析函数	196
第 21 课	傅里叶级数	201
21.1	函数的傅里叶级数展开	201
21.2	收敛定理 黎曼-勒贝格引理 狄利克雷积分	209

21.3	傅里叶级数的性质	224
21.4	傅里叶级数的积分平均收敛 帕塞瓦尔恒等式	235
第 22 课	多元函数的极限和连续性	250
22.1	$\mathbf{R}^m$ 的拓扑	250
22.2	多元函数的极限	256
22.3	多元函数的连续性	268
第 23 课	多元函数的微分学	274
23.1	多元函数的偏导数、方向导数和微分	274
23.2	复合函数的偏导数与微分 隐函数定理	286
23.3	高阶偏导数和泰勒公式	295
第 24 课	多元向量函数的微分学	300
24.1	线性变换与矩阵分析初步	300
24.2	多元向量函数的偏导数和全微分	310
24.3	隐函数定理 反函数定理 满射定理和单射定理	313
第 25 课	多元函数的极值	321
25.1	简单极值问题	321
25.2	条件极值问题	333
第 26 课	含参变量的积分	346
26.1	含参变量的定积分	346
26.2	含参变量的广义积分	361
26.2.1	含参变量广义积分的一致收敛	361
26.2.2	一致收敛条件下含参变量广义积分的性质	367
26.3	欧拉积分	384
第 27 课	重积分	392
27.1	$\mathbf{R}^m$ 中点集的若尔当测度	392
27.2	重积分的定义、性质和计算	397
27.2.1	重积分的定义与性质	397
27.2.2	重积分的计算——化重积分为累次积分	408
27.3	重积分的变元变换	417
27.4	曲面的面积	435
第 28 课	曲线积分和曲面积分	439
28.1	第一型曲线积分和曲面积分	439
28.2	第二型曲线积分和曲面积分	450
28.3	格林公式 高斯公式 斯托克斯公式	466

28.4	全微分形式和牛顿-莱布尼茨公式	486
第 29 课	广义重积分 场论初步 微分形式	497
29.1	广义重积分和含参量的重积分	497
29.2	场论初步	505
29.3	微分形式和斯托克斯公式	517
部分习题	参考答案和提示	539
参考文献		569

第 16 课 数项级数

无穷级数理论是数学分析课程中一元函数部分与微分学、积分学相并列的三个组成部分之一. 该理论分数项级数和函数项级数两部分, 其中数项级数是为函数项级数作准备的. 数项级数最核心的问题是级数敛散性的判别.

16.1 无穷级数敛散性的定义与收敛级数的基本性质

回忆**无穷级数**, 简称**级数**, 是指用加号“+”把无穷多个数连接起来所得到的一个数学表达式:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

简记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是一个给定的数列. 被加的每一项都叫做级数的一个**项**; 特别地, 代表一般项的 u_n 叫做级数的**通项**. 对每个正整数 n , 把级数的前 n 项加起来记作 S_n , 即

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则得一个数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. 这个数列叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分和数列**.

无穷级数本质上是一种特殊的数列, 即每一项都是前面一项再加一个数的数列, 因此其敛散性的判定和运算规律有一套独立于数列的专门理论. 无穷级数理论的核心问题是其敛散性的判定.

16.1.1 根据定义分析级数的敛散性

无穷级数的敛散性 如果无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ($n = 1, 2, \cdots$) 收敛, 即存在实数 S 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称这个级数**收敛**, 并称极限 S 为它的**和**, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k$ (当右端的极限存在时). 当部分和数列没有极限时, 就称级数**发散**.

应用无穷级数敛散性的定义判别一个给定的级数是收敛还是发散, 需要先求出级数的部分和数列. 求级数部分和的一个基本方法是**裂项法**, 即把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项

u_n 写成一个数列 $\{v_n\}$ 的两项之差 (下式中 m 是固定的, 即与 n 无关的正整数):

$$u_n = v_n - v_{m+n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (v_k - v_{m+k}) = \sum_{k=1}^m v_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} v_k, \quad n = m+1, m+2, \dots,$$

故若 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = c$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^m v_k - mc.$$

例 16.1 设 m 是正整数, p 为非零实数. 根据定义分析下列级数的敛散性, 并对收敛的级数求它们的和:

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m)}; & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2m)}; \\ (3) & \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2m)^p - 2(n+m)^p + n^p]; & (4) & \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n-1} [(n+m)^p - (n-m)^p]; \\ (5) & \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{4}{4n^2+3}; & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{5}{2(n^2+2n-5)}; \\ (7) & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \arccos \frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}; & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}. \end{aligned}$$

解 (1) 首先注意

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m)} \\ &= \frac{1}{n(n+m) \cdot (n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)} \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)} \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m)} \right). \end{aligned}$$

故对任意 $n > m$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m)}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{m} \left(\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+m)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times m} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m)} \right). \end{aligned}$$

因当 $n \rightarrow \infty$ 时最后这个等式右端括号中第二项极限为零, 所以 S_n 有极限, 进而所给级数收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{mm!}.$$

(2) 对任意 $n > 2m$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2m)}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+2m)} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2m} \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} \right). \end{aligned}$$

因当 $n \rightarrow \infty$ 时最后这个等式右端括号中第二项极限为零, 所以 S_n 有极限, 进而所给级数收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(3) 当 $p = 1$ 时级数中的每一项都等于零, 所以级数收敛, 和为零. 下设 $p \neq 1$. 对任意 $n > m$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(n+2m)^p - 2(n+m)^p + n^p]$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n [(k+2m)^p - 2(k+m)^p + k^p] \\ &= \sum_{k=1}^n \{[(k+2m)^p - (k+m)^p] - [(k+m)^p - k^p]\} \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} [(k+m)^p - k^p] - \sum_{k=1}^m [(k+m)^p - k^p]. \end{aligned}$$

当 $p < 1$ 时, 由微分中值定理有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+m-1} [(k+m)^p - k^p] \right| &= m|p| \sum_{k=n}^{n+m-1} (k + \theta_k m)^{p-1} \quad (0 < \theta_k < 1) \\ &\leq m^2 |p| n^{p-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以级数收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+2m)^p - 2(n+m)^p + n^p] = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = - \sum_{k=1}^m [(k+m)^p - k^p].$$

当 $p > 1$ 时, 由微分中值定理有

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m-1} [(k+m)^p - k^p] &= mp \sum_{k=n}^{n+m-1} (k + \theta_k m)^{p-1} \quad (0 < \theta_k < 1) \\ &\geq m^2 p n^{p-1} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

进而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 所以级数发散.

(4) 当 $p = 1$ 时, 级数成为 $\sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2m$, 其前 n 项的和为

$$S_n = \begin{cases} (-1)^m 2m, & n \text{ 是奇数,} \\ 0, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

因当 $n \rightarrow \infty$ 时 S_n 无极限, 所以级数发散. 下设 $p \neq 1$. 对任意 $n > 2m$, 级数

$\sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n-1} [(n+m)^p - (n-m)^p]$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=m+1}^{m+n} (-1)^{k-1} [(k+m)^p - (k-m)^p] \\ &= \sum_{k=2m+1}^{2m+n} (-1)^{-m+k-1} k^p - \sum_{k=1}^n (-1)^{m+k-1} k^p \\ &= (-1)^m \left(\sum_{k=n+1}^{2m+n} (-1)^{k-1} k^p - \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} k^p \right). \end{aligned}$$

当 $p < 1$ 时, 由微分中值定理有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2m+n} (-1)^{k-1} k^p \right| &= \left| \sum_{j=1}^{2m} (-1)^{j-1} (n+j)^p \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m [(n+2i-1)^p - (n+2i)^p] \right| \\ &= |p| \sum_{i=1}^m [(n+2i-\theta_i)^{p-1}] \quad (0 < \theta_i < 1) \\ &\leq m|p|(n+1)^{p-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以级数收敛, 且和为

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{k-1} [(k+m)^p - (k-m)^p] = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} k^p.$$

当 $p > 1$ 时, 由微分中值定理有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2m+n} (-1)^{k-1} k^p \right| &= \left| \sum_{i=1}^m [(n+2i-1)^p - (n+2i)^p] \right| \\ &= p \sum_{i=1}^m (n+2i-\theta_i)^{p-1} \quad (0 < \theta_i < 1) \\ &\geq mp(n+1)^{p-1} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

进而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = +\infty$, 所以级数发散.

(5) 首先注意

$$\frac{4}{4n^2+3} = \frac{1}{n^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{(n^2-\frac{1}{4})+1} = \frac{(n+\frac{1}{2})-(n-\frac{1}{2})}{1+(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}, \quad (16.1)$$

所以由反正切函数的差值公式得

$$\arctan \frac{4}{4n^2+3} = \arctan \left(n + \frac{1}{2} \right) - \arctan \left(n - \frac{1}{2} \right).$$

这样级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{4}{4n^2+3}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \arctan \frac{4}{4k^2+3} = \sum_{k=1}^n \left[\arctan \left(k + \frac{1}{2} \right) - \arctan \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \arctan \left(n + \frac{1}{2} \right) - \arctan \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

所以级数收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{4}{4n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}.$$

(6) 首先注意

$$\frac{5}{2(n^2+2n-5)} = \frac{10}{4n^2+8n-20} = \frac{(2n+7)-(2n-3)}{1+(2n+7)(2n-3)}, \quad (16.2)$$

所以由反正切函数的差值公式得 ($n \geq 2$)

$$\arctan \frac{5}{2(n^2+2n-5)} = \arctan(2n+7) - \arctan(2n-3).$$

这样, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{5}{2(n^2+2n-5)}$ 前 $n \geq 5$ 项的和为

$$S_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{5}{2(k^2+2k-5)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n [\arctan(2k+7) - \arctan(2k-3)] \\
&= \sum_{k=6}^{n+5} \arctan(2k-3) - \sum_{k=1}^n \arctan(2k-3) \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+5} \arctan(2k-3) - \sum_{k=1}^5 \arctan(2k-3).
\end{aligned}$$

由于

$$5 \arctan(2n-1) \leq \sum_{k=n+1}^{n+5} \arctan(2k-3) \leq 5 \arctan(2n+7),$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \arctan(2n-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \arctan(2n+7) = \frac{5}{2}\pi,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{5}{2}\pi - \sum_{k=1}^5 \arctan(2k-3) = \frac{5}{2}\pi - \sum_{k=1}^3 \arctan(2k+1).$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{5}{2(n^2+2n-5)}$ 收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{5}{2(n^2+2n-5)} = \frac{5}{2}\pi - \sum_{k=1}^3 \arctan(2k+1).$$

(7) 注意对任意正整数 $n \geq 2$ 有

$$\frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n-1} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n-1}\right)^2},$$

所以由反余弦函数的差值公式得 ($n \geq 2$)

$$\arccos \frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1} = \arccos \frac{1}{n+1} - \arccos \frac{1}{n-1}.$$

这样, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \arccos \frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}$ 前 $n \geq 2$ 项的和为

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \arccos \frac{k\sqrt{k^2-4}+1}{k^2-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \left(\arccos \frac{1}{k+1} - \arccos \frac{1}{k-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=3}^{n+2} (-1)^{k-1} \arccos \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \arccos \frac{1}{k} \\
&= \left((-1)^n \arccos \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \arccos \frac{1}{n+2} \right) - \left(\arccos 1 - \arccos \frac{1}{2} \right) \\
&= (-1)^n \left(\arccos \frac{1}{n+1} - \arccos \frac{1}{n+2} \right) + \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

可见

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{3}.$$

因此级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \arccos \frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}$ 收敛, 且和为

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \arccos \frac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1} = \frac{\pi}{3}.$$

(8) 注意对任意正整数 n 有

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2},$$

所以由反正弦函数的差值公式得

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

这样, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{k}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

可见

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$ 收敛, 且和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} = \frac{\pi}{2}.$$

注 分解式 (16.1) 和 (16.2) 可采用待定系数法得到. 以 (16.1) 为例, 设

$$\frac{4}{4n^2 + 3} = \frac{(an + b) - (an + c)}{1 + (an + b)(an + c)}.$$

把等式右端分子、分母合并同类项之后比较等式两端, 可知如果上式能成立, 则应有

$$a^2 = 4d, \quad b - c = 4d, \quad b + c = 0, \quad bc + 1 = 3d.$$

求解这个方程组得

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{4}.$$

分解式 (16.2) 可应用类似的方法得到.

除了裂项法, 还可以借助于一些已知的求和公式来求级数的部分和.

例 16.2 应用欧拉公式 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + c + \varepsilon_n$, $c = 0.577216 \cdots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ (课本上册习题 2.4 第 4 题) 求下列级数的部分和, 进而讨论它们的敛散性, 并在收敛时求其和:

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}; & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}; & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}; \\ (4) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - n}; & (5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{9n^2 - 1}. \end{aligned}$$

解 (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - 1 \\ &= [\ln(2n+1) + c + \varepsilon_{2n+1}] - \frac{1}{2}(\ln n + c + \varepsilon_n) - 1 \\ &= \ln \frac{2n+1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}c - 1 + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_n, \end{aligned}$$

可见 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ 发散.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 前 n 项的和为: 当 $n = 2m$ 时,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} \\ &= [\ln(2m) + c + \varepsilon_{2m}] - (\ln m + c + \varepsilon_m) = \ln 2 + \varepsilon_{2m} - \varepsilon_m; \end{aligned}$$

当 $n = 2m - 1$ 时,

$$S_n = S_{2m} + \frac{1}{2m} = \ln 2 + \varepsilon_{2m} - \varepsilon_m + \frac{1}{2m}.$$

可见 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 和为 $\ln 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ 前 n 项的和为

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

可见 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ 收敛, 和为 $\frac{1}{2}$.

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - n}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k^2 - k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = 2[\ln(2n) + c + \varepsilon_{2n}] - 2(\ln n + c + \varepsilon_n) \\ &= 2 \ln 2 + 2\varepsilon_{2n} - 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

可见 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \ln 2$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - n}$ 收敛, 和为 $\frac{1}{2}$.

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{9n^2 - 1}$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3k}{9k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{3k}{(3k-1)(3k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{3n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} = \frac{1}{2} [\ln(3n+1) + c + \varepsilon_{3n+1} - 1] - \frac{1}{6} (\ln n + c + \varepsilon_n) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3n+1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{3n+1} - \frac{1}{6} \varepsilon_n. \end{aligned}$$

可见 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 1}$ 发散.

已知的求和公式中最常用的是下述等比级数求和公式:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}. \quad (16.3)$$

由于这个公式对所有不等于 1 的实数 x 都成立, 把它看作函数之间的等式, 进行求导运算、积分运算, 可得一系列新的求和公式, 如

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, \end{aligned} \quad (16.4)$$

等等.

例 16.3 利用 $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$ 等导数公式求下列级数的部分和, 进而讨论它们的敛散性, 并在收敛时求其和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n+1}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}; \quad (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+1}{n(n-1)} x^n.$$

解 (1) 对 (16.4) 中最左端和最右端同乘以 x , 得

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$$

此式两端同求导, 得

$$\sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} = \frac{-n^2 x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + x + 1}{(1-x)^3}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n k^2 x^k \\ &= \frac{-n^2 x^{n+3} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - (n+1)^2 x^{n+1} + x^2 + x}{(1-x)^3}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, \end{aligned}$$

$$S_n(1) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}, & |x| < 1, \\ \text{不存在}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛, 和为 $\frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$, 在其他情况下发散.