

前 言

生物数学 (biomathematics) 是数学与生命科学、林学、农学及医学相互渗透形成的交叉学科. 它用数学的语言定量描述生命现象, 以严谨的逻辑推演生态过程, 透过纷繁复杂的生物表象, 探寻其内在的数学原理与普适规律. 从经典的种群消长到前沿的神经编码, 从传染病的传播预测到动物斑图的形成, 数学方法正日益成为揭示生命奥秘不可或缺的工具.

本书的编写初衷是为数学及生命科学相关专业的高年级本科生和研究生提供一本既能夯实理论基础, 又能接轨学科前沿的教材. 本书作者在多年讲授生物数学课程的过程中深刻体会到“源”与“流”的辩证关系. 所谓“源”, 是指学科发展过程中经过反复锤炼的经典理论——本书在基础知识的凝练上, 借鉴了国内外经典教材的精华, 力图将艰深的数学理论以适合生物学背景学生理解的方式呈现, 使之成为打通数学与生物学的桥梁. 所谓“流”, 则是本团队多年科研探索的积累与沉淀——书中诸多取材于团队成员的研究成果, 力图将新鲜思想和前沿方法, 经过教学化的改造融入教材, 让学生在学习之初就能触摸到学科的前沿脉动.

全书共分 9 章, 各章既相对独立又层层递进. 第 1 章系统介绍动力系统的定性、稳定性及分支理论, 为全书奠定数学基础. 第 2—3 章聚焦种群生态学的经典模型, 从单种群的马尔萨斯、Logistic 方程, 到两种群的 Lotka-Volterra 系统及其推广, 完整呈现了种群动力学的建模思想. 第 4—9 章则集中展示生物数学在具体领域的前沿应用: 第 4 章以时滞耦合振子为例, 揭示时滞诱发复杂动力学的机制; 第 5 章从经典的 SIR 模型拓展到受媒体影响的 SIM 模型, 探讨信息滞后对传染病传播的作用; 第 6 章将最优控制理论引入生物资源管理; 第 7 章研究离散神经元网络的对称性与多重周期解; 第 8 章介绍回归与判别分析等统计方法; 第 9 章以反应扩散 FHN 模型为核心, 深入探讨 Turing 斑图形成的数学机理与分支现象.

本书是团队集体协作的成果, 由张春蕊, 王文龙, 杨瑞智, 丁亮, 王秘共同执笔. 张春蕊、王文龙主编, 负责编排统稿. 张冉博士承担了全部书稿的校对工作, 其严谨细致为全书质量提供了重要保障.

在书稿付梓之际, 衷心感谢东北林业大学研究生教材出版基金的资助. 感谢国内外生物数学界的同仁们, 他们的研究作为本书提供了丰富的素材. 感谢历届研究生, 是你们的求知目光和尖锐提问, 推动着团队将教材不断完善. 生物数学

的魅力在于，它总是在已知与未知交叉的边缘舞蹈。真诚希望本书能成为一块引玉之砖，吸引更多优秀青年投身于这个充满挑战与奇景的领域。

由于作者学识有限，书中难免有疏漏与不妥之处，所引用的文献或有挂一漏万之嫌，恳请广大读者和同行专家不吝赐教。

编 者

2026 年 2 月于哈尔滨

目 录

前言

第 1 章 动力系统的定性、稳定性和分支相关理论	1
1.1 稳定性概念	1
1.2 李雅普诺夫判别法	3
1.3 平面自治系统的基本概念	6
1.3.1 相平面、相轨线与相图	7
1.3.2 常点、奇点与闭轨	8
1.4 平面定性理论简介	9
1.4.1 线性系统初等奇点附近的轨线分布	9
1.4.2 平面非线性自治系统奇点附近的轨线分布	19
1.4.3 极限环的概念	20
1.4.4 极限环的存在性和不存在性	24
1.5 分支理论基础	26
1.5.1 时滞微分方程分支理论基础	26
1.5.2 离散时间系统单参数分支	30
1.5.3 时滞微分方程对称分支理论简介	32
1.6 耦合生物振子研究的群论方法简介	34
1.7 时滞动力系统 Bogdanov-Takens 奇异的显示计算公式	36
1.8 构造离散系统的数值方法	45
1.8.1 解常微分方程的欧拉法	45
1.8.2 解时滞微分方程的数值法	45
1.9 离散系统 Hopf 分支存在的判别方法——扩展的 Jury 判据	48
1.9.1 Jury 判据	48
1.9.2 扩展的 Jury 判据及应用举例	49
1.10 1:1 共振 Hopf 分支规范型	53
1.10.1 非半单 1:1 共振 Hopf 分支规范型中约化的二次项型	53
1.10.2 非半单 1:1 共振 Hopf 分支规范型中约化的三次项型	56
1.10.3 1:1 共振的规范型	63
1.11 生物数学建模的基本思想	66

第 2 章 单种群模型	70
2.1 指数增长模型	70
2.2 Logistic 连续模型	71
2.3 Logistic 时滞模型	73
2.4 离散单种群模型	74
2.4.1 离散马尔萨斯模型	74
2.4.2 离散 Logistic 模型	75
2.4.3 离散时滞血细胞模型	77
第 3 章 种群间相互作用的模型	79
3.1 Volterra 模型的建立	79
3.2 两种群相互作用的模型	82
3.3 两种群相互作用的模型平衡点的稳定性	84
3.3.1 局部渐近稳定性	85
3.3.2 全局 (大范围) 稳定性	85
3.4 Holling 功能性反应系统及其定性分析	88
3.5 n 种群相互作用的模型	92
3.5.1 三种群相互作用的模型	92
3.5.2 n 种群相互作用的模型	93
3.5.3 n 斑块集合种群模型	94
3.6 离散两种群相互作用模型	94
第 4 章 具有时滞的生物模型	97
4.1 时滞耦合 van der Pol 振子模型	97
4.1.1 Hopf-zero 分支的存在性	98
4.1.2 Hopf-pitchfork 分支的规范型	99
4.2 耦合的俄勒冈振子模型	110
4.2.1 局部 Hopf 分支性质	111
4.2.2 多重周期解的存在性	122
4.2.3 Hopf 分支方向和稳定性	123
第 5 章 传染病模型	131
5.1 传染病流行和模型概况	131
5.2 SI 传染病模型	132
5.3 SIS 传染病模型	133
5.4 SIR 传染病模型	134
5.5 离散 SIS 传染病模型	137
5.6 离散 SIR 传染病模型	137

5.6.1	离散 SIR 传染病基本模型	137
5.6.2	离散 SIR 传染病模型分析	138
5.7	一类受媒体滞后报道影响的 SIM 传染病模型的动力学分析	139
5.7.1	模型建立	139
5.7.2	平衡点的稳定性分析	140
第 6 章	生物系统最优控制	148
6.1	动力系统最优控制问题解法	148
6.2	最简泛函取极值的必要条件——欧拉方程	151
6.3	条件泛函极值的必要条件	153
6.4	边界条件待定的变分问题	155
6.5	最优控制问题解法	156
第 7 章	离散时滞耦合神经元模型	159
7.1	离散双向耦合三振子模型	159
7.1.1	耦合映射的 D_3 -等变性质及线性稳定性	160
7.1.2	多重周期解分支	163
7.1.3	Chaos 现象	164
7.2	Z_3 -对称离散神经元振子模型	166
7.2.1	Z_3 -等变离散神经网络的线性稳定性	167
7.2.2	多重对称周期解的存在性	170
7.2.3	Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性	171
7.3	一般形式的三细胞时滞离散神经网络模型	175
7.3.1	三个离散神经元的五种连接方式	175
7.3.2	多重周期解的存在性	181
第 8 章	生物统计数学模型	187
8.1	回归预测数学模型	187
8.1.1	一元线性回归	187
8.1.2	多元线性回归	191
8.2	判别分析数学模型	193
第 9 章	生物模式识别	200
9.1	生物斑图	200
9.2	Turing 不稳定性	201
9.3	空间一维反应扩散 FHN 模型	205
9.3.1	Turing-Hopf 分支	205
9.3.2	Turing-Hopf 分支规范型计算	210
9.3.3	Turing-Hopf-Turing 分支	215

9.3.4 Turing-Turing 分支的空间共振	220
参考文献	236
索引	237

第 1 章 动力系统的定性、稳定性和分支相关理论

定性理论、稳定性理论和分支相关理论是动力系统理论中的三个重要组成部分. 定性理论主要研究微分方程解的长期行为, 不依赖于方程解析解的形式, 而是通过解的几何性质和拓扑性质来研究. 它关注的是系统行为的定性特征, 如稳定性、周期性、混沌等. 定性理论的方法包括使用向量场、极限环、奇点分析等工具.

稳定性理论则专注于研究系统解的稳定性特性. 稳定性理论中的一个核心概念是李雅普诺夫稳定性, 它提供了一种判断系统解是否稳定的数学工具. 稳定性理论也研究了系统在受到扰动时的行为, 以及系统稳定性随参数变化的规律.

分支理论研究的是系统解在某些参数达到特定值时发生的突变现象, 这些突变称为分支. 分支理论试图预测和解释这些突变, 以及它们对系统行为的影响. 分支现象在工程、物理、生物学等领域的动态系统中普遍存在, 如在流体力学中的分岔现象, 或在生态学种群模型中的突变行为. 这三个理论相互关联, 为理解和预测复杂动态系统的行为提供了强有力的数学工具. 通过这些理论, 我们可以更好地理解系统的内在特性, 预测系统可能的演化路径, 以及设计控制策略来引导系统向期望的状态发展.

本章对定性理论、稳定性理论及分支相关理论的一些基本概念和基本方法作一简单介绍. 1.1 节—1.4 节的内容取材于文献 (东北师范大学微分方程教研室, 2022).

1.1 稳定性概念

考虑微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.1.1)$$

其中函数 $f(t, x)$ 对 $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $t \in (-\infty, +\infty)$ 连续, 对 x 满足局部利普希茨条件.

设方程 (1.1.1) 对初值 (t_0, x_1) 存在唯一解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$, 而其他解记作 $x = x(t, t_0, x_0)$. 向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 的范数取 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \geq 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得只要

$$\|x_0 - x_1\| < \delta,$$

就有

$$\|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)\| < \varepsilon$$

对一切 $t \geq t_0$ 成立, 则称 (1.1.1) 的解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 是稳定的. 否则是不稳定的.

假设 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 是稳定的, 而且存在 $\delta_1 (0 < \delta_1 \leq \delta)$, 使得只要

$$\|x_0 - x_1\| < \delta_1,$$

就有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1)) = 0,$$

则称 (1.1.1) 的解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 是渐近稳定的.

为了简化讨论, 通常把解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 的稳定性化成零解的稳定性问题. 下面记 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_1)$, 作如下变量代换: 令

$$y = x(t) - \varphi(t), \quad (1.1.2)$$

则

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, x(t)) - f(t, \varphi(t)) = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t)) \stackrel{d}{=} F(t, y),$$

于是在变换 (1.1.2) 下, 将方程 (1.1.1) 化成

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \quad (1.1.3)$$

其中 $F(t, y) = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t))$. 这样关于 (1.1.1) 的解 $x = \varphi(t)$ 的稳定性问题就化为 (1.1.3) 的零解 $y = O$ 的稳定性问题了. 因此, 我们可以在下文中只考虑 (1.1.1) 的零解 $x = O$ 的稳定性, 即假设 $f(t, O) \equiv O$, 并有如下定义.

定义 1.1.1 若对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \geq 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使当 $\|x_0\| < \delta$ 时有

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad (1.1.4)$$

对所有的 $t \geq t_0$ 成立, 则称 (1.1.1) 的零解是稳定的. 反之是不稳定的.

定义 1.1.2 若 (1.1.1) 的零解是稳定的, 且存在 $0 < \delta_1 < \delta$ (δ 为定义 1.1.1 中的 δ), 当 $\|x_0\| < \delta_1$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0,$$

则称 (1.1.1) 的零解是渐近稳定的.

常系数齐次线性微分方程组的稳定性可以通过分析其特征值来判断. 考虑如下方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (1.1.5)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, A 是 $n \times n$ 矩阵. 若 A 的所有特征根都具严格负实部, 则 (1.1.5) 的零解是渐近稳定的.

证明 不失一般性, 取初始时刻 $t_0 = 0$, 设 $\Phi(t)$ 是 (1.1.5) 的标准基本解矩阵, 满足 $x(0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 可写成

$$x(t) = \Phi(t)x_0. \quad (1.1.6)$$

由 A 的所有特征根都具有负实部知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0, \quad (1.1.7)$$

于是知存在 $t_1 > 0$, 使 $t > t_1$ 时 $\|\Phi(t)\| < 1$. 从而对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_0 = \varepsilon$, 则当 $\|x_0\| < \delta_0$ 时, 由 (1.1.6) 有

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| \leq \|x_0\| < \varepsilon, \quad t \geq t_1, \quad (1.1.8)$$

当 $t \in [0, t_1]$ 时, 由解对初值的连续依赖性, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\|x_0\| < \delta_1$ 时,

$$\|x(t) - O\| < \varepsilon, \quad t \in [0, t_1]. \quad (1.1.9)$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 综合上面讨论知, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时有

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [0, +\infty), \quad (1.1.10)$$

即 $x = O$ 是稳定的.

由 (1.1.7) 知对任意 x_0 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t)x_0 = O$, 故 $x = O$ 是渐近稳定的.

1.2 李雅普诺夫判别法

考虑自治系统

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2.1)$$

假设 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$ 在 $G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq K\}$ 上连续, 满足局部利普希茨条件, 且 $F(O) = O$.

引入李雅普诺夫函数概念.

定义 1.2.1 若函数

$$V(x) : G \rightarrow \mathbb{R}$$

满足 $V(O) = 0$, $V(x)$ 和 $\frac{\partial V}{\partial x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 都连续, 且若存在 $0 < H \leq K$, 使在 $D = \{x | \|x\| \leq H\}$ 上 $V(x) \geq 0$ (≤ 0), 则称 $V(x)$ 是常正 (负) 的; 若在 D 上除 $x \neq O$ 外总有 $V(x) > 0$ (< 0), 则称 $V(x)$ 是正 (负) 定的; 既不是常正又不是常负的函数称为变号函数.

通常我们称函数 $V(x)$ 为李雅普诺夫函数. 易知:

函数 $V = x_1^2 + x_2^2$ 在 (x_1, x_2) 平面上为正定的;

函数 $V = -(x_1^2 + x_2^2)$ 在 (x_1, x_2) 平面上为负定的;

函数 $V = (x_1^2 - x_2^2)$ 在 (x_1, x_2) 平面上为变号函数;

函数 $V = x_1^2$ 在 (x_1, x_2) 平面上是常正函数.

李雅普诺夫函数有明显的几何意义. 首先看正定函数 $V = V(x_1, x_2)$.

在三维空间 (x_1, x_2, V) 中, $V = V(x_1, x_2)$ 是一个位于坐标面 x_1Ox_2 即 $V = 0$ 上方的曲面. 它与坐标面 x_1Ox_2 只在一个点, 即原点 $O(0, 0, 0)$ 接触 (图 1.2.1(a)). 如果用水平面 $V = C$ (正常数) 与 $V = V(x_1, x_2)$ 相交, 并将截面垂直投影到 x_1Ox_2 平面上, 就得到一组一个套一个的闭曲线族 $V(x_1, x_2) = C$ (图 1.2.1(b)), 由于 $V = V(x_1, x_2)$ 连续可微, 且 $V(0, 0) = 0$, 故在 $x_1 = x_2 = 0$ 的充分小的邻域中, $V(x_1, x_2)$ 可以任意小. 即在这些邻域中存在 C 值可任意小的闭曲线 $V = C$.

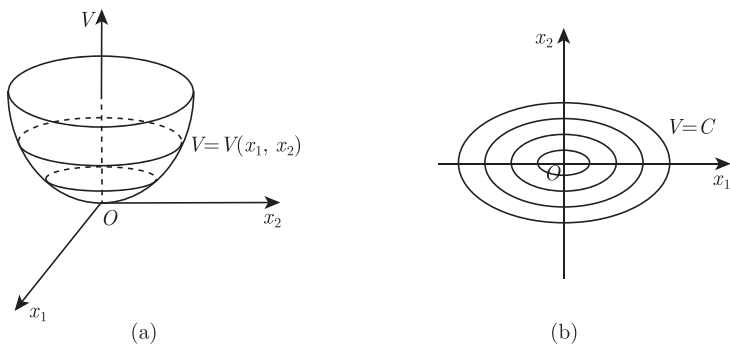


图 1.2.1 V 函数示意图

对于负定函数 $V = V(x_1, x_2)$ 可作类似的几何解释, 只是曲面 $V = V(x_1, x_2)$ 将在坐标面 x_1Ox_2 的下方.

对于变号函数 $V = V(x_1, x_2)$, 自然应对应于这样的曲面: 在原点 O 的任意邻域, 它既有在 x_1Ox_2 平面上方的点, 又有在其下方的点.

定理 1.2.1 对系统 (1.2.1), 若在区域 D 上存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足

(1) 正定;

$$(2) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) \text{ 常负,}$$

则 (1.2.1) 的零解是稳定的.

例 1.2.1 考虑无阻尼线性振动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.2.2)$$

的平衡位置的稳定性.

解 把 (1.2.2) 化为等价系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

(1.2.2) 的平衡位置即 (1.2.3) 的零解. 作 V 函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{\omega^2} y^2 \right),$$

有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.3)} = \left(x \cdot \dot{x} + \frac{1}{\omega^2} y \cdot \dot{y} \right) \Big|_{(1.2.3)},$$

即 $V(x, y)$ 正定, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.3)} \leq 0$. 于是, 由定理 1.2.1 知 (1.2.3) 的零解是稳定的,

即 (1.2.2) 的平衡位置是稳定的.

引理 1.2.1 若 $V(x)$ 是正定 (或负定) 的李雅普诺夫函数, 且对连续有界函数 $x(t)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0,$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

定理 1.2.2 对系统 (1.2.1), 若在区域 D 上存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足

(1) 正定;

$$(2) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) \text{ 负定,}$$

则 (1.2.1) 的零解渐近稳定.

例 1.2.2 证明方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

的零解渐近稳定.

证明 作李雅普诺夫函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

有

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.4)} = (x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y})|_{(1.2.4)} = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1),$$

在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 上 $V(x, y)$ 正定, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.4)}$ 负定, 故由定理 1.2.2

知其零解渐近稳定.

下面给出不稳定性定理.

定理 1.2.3 对系统 (1.2.1), 若在区域 D 上存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足

$$(1) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.2.1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) \text{ 正定};$$

$$(2) V(x) \text{ 不是常负函数},$$

则系统 (1.2.1) 的零解是不稳定的.

1.3 平面自治系统的基本概念

本节考虑平面自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

以下总假定函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域

$$D: |x| < H, |y| < H \quad (H \leq +\infty)$$

上连续并满足初值解的存在与唯一性定理的条件.

1.3.1 相平面、相轨线与相图

我们把 xOy 平面称为 (1.3.1) 的相平面, 而把 (1.3.1) 的解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在 xOy 平面上的轨迹称为 (1.3.1) 的轨线或相轨线. 轨线族在相平面上的图像称为 (1.3.1) 的相图.

易于看出, 解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在相平面上的轨线, 正是这个解在 (t, x, y) 三维空间中的积分曲线在相平面上的投影.

例 1.3.1 考虑如下方程组的性质

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

很明显, 方程组有特解 $x = \cos t$, $y = \sin t$, 它在 (t, x, y) 三维空间中的积分曲线是一条螺旋线 (图 1.3.1(a)), 经过点 $(0, 1, 0)$. 当 t 增加时, 螺旋线向上方盘旋. 上述解在 xOy 平面上的轨线是圆 $x^2 + y^2 = 1$. 它恰为上述积分曲线在 xOy 平面上的投影. 当 t 增加时, 轨线的方向如图 1.3.1(b) 所示.

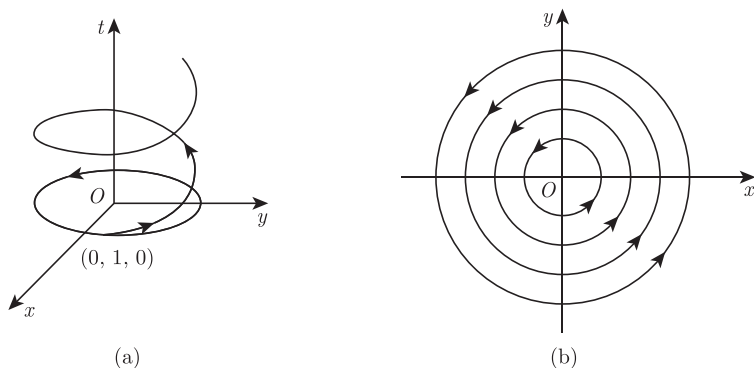


图 1.3.1 螺旋线及其轨线

另外, 易知对于任意常数 α , 函数 $x = \cos(t+\alpha)$, $y = \sin(t+\alpha)$ 也是方程组的解. 它们的积分曲线是经过点 $(-\alpha, 1, 0)$ 的螺旋线. 但是, 它们与解 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 有同一条轨线 $x^2 + y^2 = 1$.

同时, $x = \cos(t+\alpha)$, $y = \sin(t+\alpha)$ 的积分曲线可以由 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 的积分曲线沿 t 轴向下平移距离 α 而得到. 由于 α 的任意性, 可知轨线 $x^2 + y^2 = 1$ 对应着无穷多条积分曲线.

为了画出方程组在相平面上的相图, 求出方程组通解

$$\begin{cases} x = A \cos(t + \alpha), \\ y = A \sin(t + \alpha), \end{cases}$$

其中 A, α 为任意常数. 于是, 方程组的轨线就是圆族 (图 1.3.1(b)).

特别地, $x = 0, y = 0$ 是方程的解, 它的轨线是原点 $O(0, 0)$.

1.3.2 常点、奇点与闭轨

现在考虑自治系统 (1.3.1) 的轨线类型. 显然, (1.3.1) 的一个解 $x = x(t), y = y(t)$ 所对应的轨线可分为自身不相交和自身相交的两种情形. 其中轨线自身相交是指, 存在不同时刻 t_1, t_2 , 使得 $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$. 这样的轨线又有以下两种可能形状.

(1) 若对一切 $t \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$x(t) \equiv x_0, \quad y(t) \equiv y_0, \quad (x_0, y_0) \in D,$$

则称 $x = x_0, y = y_0$ 为 (1.3.1) 的一个**定常解**. 它所对应的积分曲线是 (t, x, y) 空间中平行于 t 轴的直线 $x = x_0, y = y_0$. 对应此解的轨线是相平面中一个点 (x_0, y_0) . 我们称 (x_0, y_0) 为**奇点** (或平衡点). 显然 (x_0, y_0) 是 (1.3.1) 的一个奇点的充分必要条件是

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

(2) 若存在 $T > 0$, 使得对一切 t 有

$$x(t+T) = x(t), \quad y(t+T) = y(t),$$

则称 $x = x(t), y = y(t)$ 为 (1.3.1) 的一个**周期解**, T 为**周期**. 它所对应的轨线显然是相平面中的一条闭曲线, 称为**闭轨**.

由以上讨论和 (1.3.1) 轨线的唯一性可知, 自治系统 (1.3.1) 的一条轨线只可能是下列三种类型之一:

(1) 奇点; (2) 闭轨; (3) 自不相交的非闭轨线.

平面定性理论的研究目标就是: 在不求解的情况下, 仅从 (1.3.1) 右端函数的性质出发, 在相平面上描绘出其轨线的分布图, 称为**相图**. 几何解释如下.

如果把 (1.3.1) 看成描述平面上一个运动质点的运动方程, 那么 (1.3.1) 在相平面上每一点 (x, y) 确定了一个速度向量

$$V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (1.3.2)$$

因而, (1.3.1) 在相平面上定义了一个**速度场**或称**向量场**. 而 (1.3.1) 的轨线就是相平面上一条与向量场 (1.3.2) 相吻合的光滑曲线. 这样积分曲线与轨线的显著区别是: 积分曲线可以不考虑方向, 而轨线是一条有向曲线, 通常用箭头在轨线上标明对应于时间 t 增大时的运动方向.

进一步, 在方程 (1.3.1) 中消去 t , 得到方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.3.3)$$

由 (1.3.3) 易见, 经过相平面上每一个常点只有唯一轨线, 而且可以证明: 常点附近的轨线拓扑等价于平行直线. 这样, 只有在奇点处, 向量场的方向不确定.

因此, 在平面定性理论中, 通常从奇点入手, 弄清楚奇点附近的轨线分布情况. 然后, 再弄清 (1.3.1) 是否存在闭轨, 因为一条闭轨线可以把平面分成其内部和外部, 再由轨线的唯一性, 对应内部的轨线不能走到外部, 同样对应外部的轨线也不能进入内部.

1.4 平面定性理论简介

1.4.1 线性系统初等奇点附近的轨线分布

奇点是动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

的一类特殊轨线. 它对于研究 (1.3.1) 的相图有重要的意义. 为此, 本节首先研究一类最简单的自治系统——平面线性系统的奇点与它附近的轨线的关系. 平面线性系统的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

假定其系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

为非奇异矩阵, 即其行列式 $\det A \neq 0$ (即 A 不以零为特征根).

显然, (1.4.1) 只有一个奇点 $(0, 0)$. 我们研究 (1.4.1) 在 $(0, 0)$ 附近的轨线分布. 因为 (1.4.1) 是可解的, 我们的做法是先求出系统的通解, 然后消去参数 t , 得到轨线方程. 从而了解在奇点 $(0, 0)$ 附近的轨线分布情况. 根据奇点附近轨线分布的形式, 可以确定奇点有四种类型, 即结点、鞍点、焦点和中心.

为了讨论问题方便, 我们把方程写成向量形式. 令

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{则} \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

此时方程组 (1.4.1) 可以写成向量形式

$$\frac{dX}{dt} = AX. \quad (1.4.2)$$

1. 系数矩阵为标准型的平面线性系统的奇点附近轨线分布

我们研究线性系统 (1.4.2) 在奇点 $(0, 0)$ 附近轨线分布的方法是: 首先应用线性变换, 把系统 (1.4.2) 化成标准型, 并从化成标准型的方程中求出解, 确定其轨线分布; 然后再回过头来考虑系统 (1.4.2) 在奇点附近的轨线分布.

由矩阵理论, 存在非奇异矩阵 T , 使得

$$J = TAT^{-1},$$

其中, J 为若尔当标准型, 令 $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, 作代换 $\tilde{X} = TX (X = T^{-1}\tilde{X})$, 则

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = T \frac{dX}{dt} = TAT^{-1}\tilde{X} = J\tilde{X}.$$

于是系统 (1.4.2) 化成

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = J\tilde{X}. \quad (1.4.3)$$

由线性变换的理论可知, 标准型 J 的形式由系数矩阵 A 的特征根的情况决定.

(1) A 的特征根为相异实根 λ, μ 时,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$