

前言

本书专为自主学习打造，旨在帮你用最短的时间吃透微积分的核心方法。本书编写基于如今已被广泛认可的教学理念——微积分不是“听”会的，而是“练”会的。

本书采用“讲解 – 练习 – 即时反馈”的螺旋式学习结构，打造沉浸式自主学习体验：每一节均以简明扼要的概念导引开篇（通常一至两页），快速搭建知识框架；紧接着是一道紧扣核心要点的典型习题，直击学习重点；习题的完整解答紧随其后，实现“练完即评、疑点即解”。

你的学习路径绝非刻板的线性推进，而是由你对每道题的思考与作答自然引导——答对则深入拓展，存疑则回溯巩固，真正实现个性化、自适应的学习节奏，让知识吸收更高效。

本书面向首次接触微积分的初学者，语言平实，直击本质；同时，最后一章还拓展了若干进阶主题，为学有余力、希望走得更远的读者预留了上升空间。

最初，本书的目标读者是那些即将步入大学、却不愿因补修微积分而将物理课推迟一学期的新生。事实上，入门物理所需的微积分基础并不高深——完全可以通过系统、高效的自学扎实掌握。

时至今日，本书的读者早已不再局限于初学物理的学生，而是遍及在校学生、工程师、科研人员、教育从业者、跨学科研究者，以及终身学习者。究其根本，微积分是一种赋能性的思维方式——它不仅是所有物理科学与工程学的通用语言，更是分析变化规律、构建关联模型、量化作用影响的核心工具。经济学借助它理解边际效应，社会科学用它刻画群体动态，医学与遗传学通过它追踪疾病传播或基因表达，公共卫生则靠它评估干预策略，诸如此类的应用，遍布各行各业。

一旦掌握了微积分的核心思想，你看待世界的方式便会悄然改变：事物如何变化？变量之间如何相互影响？因果关系又如何层层展开？你将开始以一种更清晰、更精确、更具洞察力的视角去追问、去思考。

我们衷心希望，本书能成为你开启这一思维跃迁的坚实起点。

丹尼尔·克莱普纳
彼得·杜尔马什金
马萨诸塞州剑桥市

目 录

第 1 章 基础知识	1
1.1 一点开胃菜	1
1.2 函 数	3
1.3 图 像	6
1.4 一次函数和二次函数	12
1.5 角及其度量	21
1.6 三角学	30
1.7 指数与对数	45
1.8 总 结	57
第 2 章 微分学	62
2.1 函数的极限	62
2.2 速 度	75
2.3 导 数	88
2.4 函数及其导数的图像	94
2.5 求 导	103
2.6 求导的一些法则	110
2.7 三角函数的求导	122
2.8 对数与指数函数的求导	129

2.9 高阶导数	138
2.10 极大值与极小值	141
2.11 微 分	150
2.12 短暂回顾和一些问题	155
2.13 总 结	174
第 3 章 积分学	178
3.1 原函数、积分与不定积分	178
3.2 一些积分技巧	183
3.3 曲线下方的面积与定积分	193
3.4 积分的一些应用	212
3.5 多重积分	222
3.6 总 结	230
第 4 章 进阶主题：泰勒级数、数值积分和微分方程	234
4.1 泰勒级数	234
4.2 数值积分	244
4.3 微分方程	248
4.4 附加问题	258
4.5 总 结	263
附录 A 定理和公式的证明	266
A.1 和角的三角函数	266
A.2 关于极限的一些定理	266

A.3	指数函数	269
A.4	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 的证明	271
A.5	x^n 的微分	272
A.6	三角函数的微分	273
A.7	两函数乘积的微分	274
A.8	微分的链式法则	274
A.9	$\ln x$ 的微分	275
A.10	当两个变量都依赖于第三个变量时的微分	276
A.11	证明：若两函数具有相同的导数，则它们仅相差一个常数 ...	276
A.12	涉及三角函数的极限	277
附录 B 微分学补充主题		278
B.1	隐微分法	278
B.2	反三角函数的微分	279
B.3	偏导数	282
B.4	圆周运动中的径向加速度	284
B.5	进一步的学习资源	286
附录 C 帧答案		287
C.1	第 1 章	287
C.2	第 2 章	288
C.3	第 3 章	289

附录 D 复习题及答案	290
D.1 第 1 章	290
D.2 第 2 章	291
D.3 第 3 章	295
D.4 复习题答案	297
附录 E 公 式	299
E.1 导数公式	299
E.2 积分公式	300

第1章 基础知识

1.1 一点开胃菜

“微积分”（calculus）这个名字虽然听起来令人望而生畏，但它本质上并非一门特别高深的学科。微积分最核心的思想，清晰、自然且易于理解，而你对这些思想价值的体会，将随着实践能力的逐步提升而日益加深——不是靠死记，而是源于运用中的领悟。

学完本书，你不仅能从容应对大量实际问题，还能为后续学习多重积分、级数展开、偏微分方程等更精巧、更系统的微积分技巧打下坚实基础。而这一切的关键，在于“动手”——当然，我们更由衷地希望，这份“动手”的过程，本身便是充满兴味与成就感的学习体验。

本书共分4章，每章由若干节与子节构成，每一个子节称为一个“帧”（frame）——寓意它如同电影中的一格画面，聚焦一个具体概念或技能，短小精炼、目标明确。每章末尾均附有本章要点的简明总结，帮助你梳理脉络、巩固认知。

全书主体之后，还设有多个附录，提供了延伸的补充知识，以及一组综合复习题和完整解答，供你自我检测与查漏补缺。

全书所有“帧”按顺序统一编号，贯穿始终。学习本书的核心方式就是：逐帧研读 + 即时解题。你可随时核对答案——简短解答通常印在后续某一页的页脚处；若解答较长，则单独通过一个“帧”来讲解；此外，全书所有帧的习题答案均在书末集中呈现，方便快速查阅。

你的学习路径，将由你对每个问题的回答自然决定：

答对了？——恭喜！你将被引导至下一帧，接触新概念、迎接新挑战。

遇到困难？——不必担心。解答中不仅会给出正确结果，更会清晰阐释思路与关键步骤；有时还会贴心地提示：“请先回顾第 42 帧”或“建议尝试第 87 帧的变式练习”——让每一次卡顿，都成为理解深化的契机。

这，就是本书为你设计的、温和而坚定的思维成长之路。

第 1 帧

我们先回顾若干后续讨论所必需的基础知识，包括以下三项核心内容：

（1）数学函数的定义。

（2）函数图像的解读与绘制。

（3）常用几类函数的基本特性：线性函数与二次函数、三角函数、指数函数与对数函数。

关于计算器的一点说明：本书中有少数题目需要用到计算器。你手机自带的科学计算器已完全足够。若你手边暂时没有计算器——跳过这些题目即可。全书的核心思想、逻辑脉络与解题方法，均可在不依赖计算器的情况下完整掌握。

第 2 帧

接下来，让我们一览本书的结构脉络：第 1 章回顾一些后续要用到的知识点，第 2 章聚焦微分学，第 3 章引入积分学，第 4 章介绍一些更具深度的主题。每章末尾均设有本章小结，以梳理核心思想、关键结论与典型方法。书末附录给出了书中用到的一些公式和定理的证明、拓展若干补充性的主题，以及一些额外的复习题和公式速查表。

现在，我们先温习一下“函数”的定义。若你已熟悉函数的概念，以及“自变量”与“因变量”的含义，可直接跳至第 14 帧（事实上，本章处处留有“跳读空间”：对已掌握的内容，尽可轻快掠过；而对尚感陌生之处，哪怕只多花几分钟细细咀嚼，也往往是值得的）。

温馨提示：接下来的若干帧比本书的其余部分稍显“正式”，因为我们要从定义出发，为整座微积分大厦打下基础。

1.2 函 数

第 3 帧

函数的定义利用了集合的思想，如果你知道什么是集合，可以直接跳到第 4 帧，否则看下去。

一个集合是一些对象的整体，不必是实质的对象，关键在于：我们能确定无误地判断一个对象是否在这个集合中。

集合可以通过列举它的元素来描述，例如， $\{23, 7, 5, 10\}$ 是四个整数构成的集合。 $\{\text{雷克雅未克}, \text{渥太华}, \text{罗马}\}$ 是三个首都城市构成的集合。

集合还可以通过规则描述，例如，所有的偶数（这个集合包含有无穷多个元素，显然无法一一列举）。

所有实数构成的集合是一个特别有用的集合，它包含了 5 、 -4 、 0 、 $\frac{1}{2}$ 、 π 、 -3.482 、 $\sqrt{2}$ 这样的数，以及更多的数。所有实数构成的集合不包含负数的平方根这样的数，我们把后者称为复数。但在本书中，我们只考虑实数的问题。

使用“集合”这个数学词汇的方法一般是“设 A 是所有满足……的……构成的集合”。其中第一个空位描述了一个或几个条件，第二个空位表示一个已有的集合的一般元素（这是用规则描述来表示一个集合，我们更多时候用这种方法描述集合，而不是列举所有元素）。

第 4 帧

在下面的横线中，列出 -10 到 $+10$ 之间所有奇数构成的集合的所有元素。

元素：_____

请前往第 5 帧寻找正确答案。

第 5 帧

下面是 -10 到 $+10$ 之间所有奇数构成的集合的元素：

$-9, -7, -3, -5, -1, 1, 3, 5, 7, 9$

第 6 帧

现在我们开始讨论函数，函数的定义如下所示：

函数是一个规则，将某个集合 A 中的每个元素关联到集合 B 中的恰好一个元素。

定义函数的规则可以是一个数学表达式（例如， $y=x^2$ ），也可以是一个关联数对的列表（例如，一天中每个小时都可以与当时的温度相关联）。若 x 表示集合 A 中的一个元素，则函数 f 所确定的集合 B 中与 x 关联的元素记为 $f(x)$ 。我们通常把 $f(x)$ 称为 f 在元素 x 处的取值。

集合 A 称为函数的定义域，当 x 在定义域中变动时， $f(x)$ 能取到的所有值为集合 B 的一个子集，称为函数的值域。 f 的值域不一定为集合 B 的全部。

一般的情况下， A 和 B 不要求是实数集。但是在本书中，就像在第 3 帧提到的，我们只考虑实数集到实数集的函数。

第 7 帧

例如，对于函数 $f(x)=x^2$ ，定义域是所有实数，值域是_____。

第 8 帧

值域是所有的非负实数，请前往第 9 帧寻找解释或者直接前往第 10 帧。

第 9 帧

两个负数的乘积为一个正数，因此对任何非零实数 x ， x^2 是正数。当 x 是 0 时， x^2 也是 0。因此， $f(x)=x^2$ 的值域为所有的非负实数。^①

第 10 帧

我们的主要兴趣是研究由表达式定义的函数的规律。如果定义域没有明确说明，那么我们一般将其理解为使得表达式有意义的所有实数构成集合。例如：

(1) $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为_____。

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域为_____。

答案在第 11 帧。

第 11 帧

函数 $\sqrt{x}$ 对非负实数 x 均有定义，因此 (1) 的答案为所有非负实数。函数 $\frac{1}{x}$ 对非零实数 x 有意义，因此 (2) 的答案为所有非零实数构成的集合。

第 12 帧

如果一个函数由一个公式定义，例如， $f(x)=ax^3+b$ ，那么 x 称为自变量，

① 这些是英文原版的说法，只证明了值域包含于非负实数集。如果要说明每个非负实数都在值域中，那么需要说明非负实数都可以开平方根，这个结论的严格证明需要实数的结构和连续函数的定义，后面才能研究——译者注。

$f(x)$ 称为因变量。这种记法的好处是：当自变量给定（例如， $x=3$ ）时，因变量的值可以直接写成 $f(3)$ 。

我们常常用一个字母来表示因变量，例如：

$$y=f(x)$$

这里， x 为自变量， y 为因变量。

第 13 帧

在数学中，常常用符号 x 代表一个自变量， f 代表函数， $y=f(x)$ 代表因变量。当然，你也可以用任何别的符号来表示函数、自变量、因变量。例如，我们可以写成 $z=H(r)$ ，此处 r 是自变量， z 是因变量， H 是函数。

现在我们知道了函数的含义，接下来我们用一个图而不是公式来描述一个函数。

1.3 图 像

第 14 帧

如果你知道怎么画出一个函数的图像，那么可以跳到第 19 帧，否则，请前往第 15 帧。

第 15 帧

开始，我们需要建立一个坐标系。大多数情况下，我们需要画出两条垂直相交的直线，一条为水平线，一条为竖直线。水平线称为 x 轴，竖直线称为 y 轴，两个轴的交点称为原点，这些一起构成了一个坐标系。

接下来如图 1.1 所示，我们选择一个合适的长度单位，从原点开始，在 x 轴上标记出数字刻度，原点右面为正，左面为负。同样地，我们在 y 轴上标记出刻度，

向上为正，向下为负。 y 轴上的刻度不需要和 x 轴上的一样，甚至两个轴的单位可以不同，例如，一个表示时间，一个表示距离。

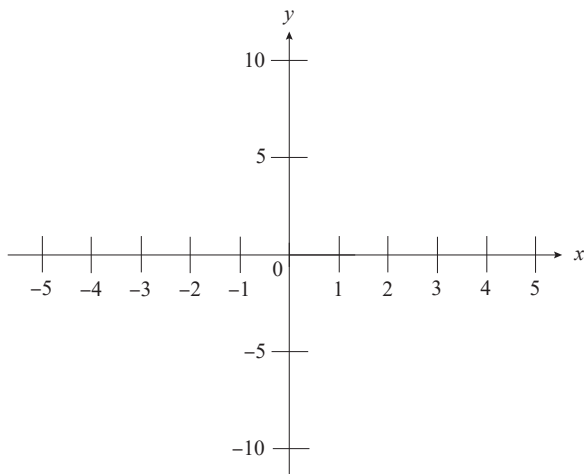


图 1.1

第 16 帧

我们可以通过以下方式表示函数所关联的两个量： a 表示自变量 x 的某个取值， b 表示因变量 $y=f(x)$ 的相关值，即 $b=f(x)$ 。

如图 1.2 所示，我们画一条与 y 轴平行、距离为 a 的直线，再画一条与 x 轴平行、距离为 b 的直线，两条直线的交点 P 用数对 (a, b) 表示。

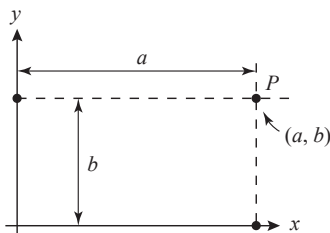


图 1.2

数 a 称为点 P 的 x 坐标，数 b 称为点 P 的 y 坐标。在用 (a, b) 表示一个点的坐标时，我们总是先写这个点的 x 坐标，后写这个点的 y 坐标。

作为对该术语的复习，请在下面圈出正确答案。对于点 $(5, -3)$ ：

x 坐标：

-5	-3	3	5
----	----	---	---

y 坐标：

-5	-3	3	5
----	----	---	---

第 17 帧

绘制函数 $y=f(x)$ 图像最直接的方法是列出一张表格，其中包含适当间隔的 x 值以及对应的 $y=f(x)$ 值。然后，每一对数值 (x, y) 都可以如前一帧所示用一个点来表示。将这些点用一条光滑曲线连接起来，就得到了该函数的图像。当然，曲线上的点可能只是近似值。如果我们想要得到精确的图像，只需格外仔细并使用更多的点即可。（另一方面，粗略的图像对许多用途来说已经相当不错了）

第 18 帧

例如，图 1.3 是函数 $y=3x^2$ 的图像。图中给出了 x 和 y 的值表，并在图像上标出了这些点。

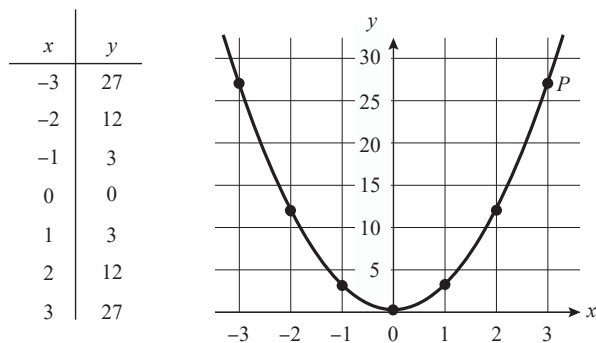


图 1.3

为自我检测，请圈出与图中所示点 P 对应的坐标对。

$(3, 27)$	$(27, 3)$	以上都不是
-----------	-----------	-------

如果错误，请再次学习第 16 帧，然后转到第 19 帧。如果正确，请直接前往第 19 帧。

第 19 帧

常数函数是一个相当特殊的函数，将一个固定的数 c 赋给自变量 x 的每一个取值，即 $f(x)=c$ 。

这个函数之所以特殊，是因为无论自变量取什么值，因变量的值都保持不变。尽管如此，关系式 $f(x)=c$ 仍然满足函数定义的要求：对于每一个 x ，都恰好指定了一个 $f(x)$ 的值，只不过所有的 $f(x)$ 值恰好都相同。

下面我们通过一个例子来理解：常数函数 $y=f(x)=3$ 的图像是一条平行于 x 轴且经过点 $(0, 3)$ 的直线，如图 1.4 所示。

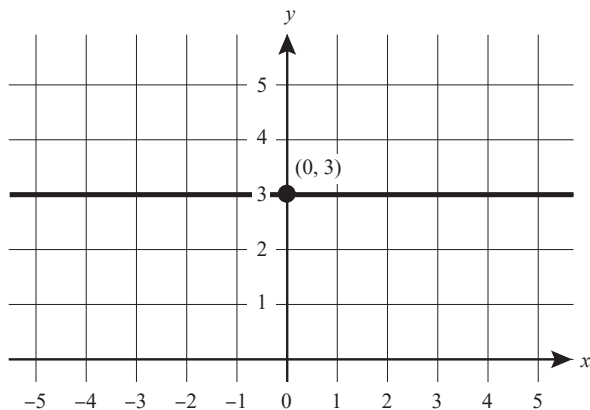


图 1.4

第 20 帧

另一个特殊的函数是绝对值函数。 x 的绝对值用符号 $|x|$ 表示。一个数 x 的绝对值表示该数的大小（或称模），而不考虑其符号。例如：

$$|-3| = |3| = 3$$

现在我们来一般性地定义 $|x|$ ，但首先需要回顾不等式符号：

- $a > b$ 表示 a 大于 b 。
- $a \geq b$ 表示 a 大于或等于 b 。
- $a < b$ 表示 a 小于 b 。
- $a \leq b$ 表示 a 小于或等于 b 。

利用这种符号，我们可以用以下两条规则定义绝对值函数 $|x|$ ：

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

第 21 帧

展示函数行为的一个好方法是绘制其图像。因此，作为练习，请在图 1.5 中绘制函数 $y = |x|$ 的图像。

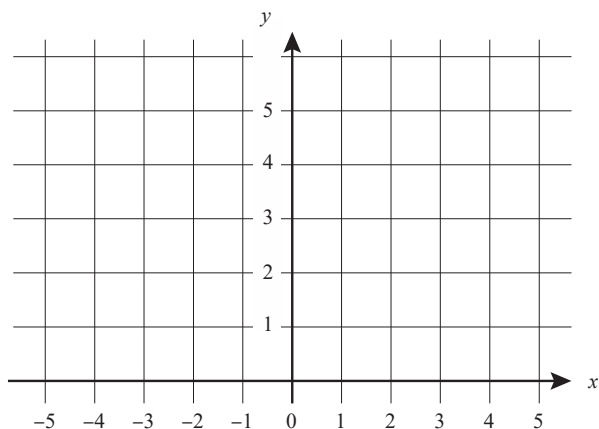


图 1.5

答 案

第 16 帧：5，-3。

第 18 帧：(3, 27)。