

“现代数学基础丛书”序

在信息时代, 数学是社会发展的基石.

由于互联网的迅猛发展, 一方面, 现在人们获得数学知识和信息的途径之多和便捷性是以前难以想象的; 另一方面人们通过搜索在互联网上获得的数学知识和信息很难做到系统深入, 也很难保证在互联网上阅读到的数学知识和信息的质量.

在这样的背景下, 高品质的数学书就变得益发重要.

科学出版社组织出版的“现代数学基础丛书”旨在对重要的数学分支和研究方向或专题作系统的介绍, 注重基础性和时代性. 丛书的目标读者主要是数学专业的高年级本科生、研究生以及数学教师和科研人员, 丛书的部分卷对其他与数学联系紧密的学科的研究生和学者也是有参考价值的.

本丛书自 1981 年面世以来, 已出版 200 余卷, 介绍的主题广泛, 内容精当, 在业内享有很高的声誉, 深受尊重, 对我国的数学人才培养和数学研究发挥了非常重要的作用.

这套丛书已有四十余年的历史, 一直得到数学界各方面的大力支持, 科学出版社也十分重视, 以高专业标准编辑丛书的每一卷. 今天, 我国的数学水平不论是广度还是深度都已经远远高于四十年前, 同时, 世界数学的发展也更为迅速, 我们对跟上时代步伐的高品质数学书的需求从而更为迫切. 我们诚挚地希望, 在大家的支持下, 这套丛书能与时俱进, 越办越好, 为我国数学教育和数学研究的继续发展做出不负期望的重要贡献.

席南华

2024 年 1 月

前 言

微局部分析是 20 世纪 50 年代发展起来的一种数学分析方法, 它利用调和与分析 (特别是傅里叶分析) 理论研究线性偏微分方程, 主要包括: 拟微分算子和傅里叶积分算子理论等. 微局部是指在研究与函数相关的数学分析问题, 不仅在函数的变量空间 (底空间) 局部化, 同时也在其相空间 (即傅里叶变换的变量空间, 也可以表示成余切空间或者对偶空间) 局部化地研究相关问题, 因此它是处理各向异性与退化问题的强有力的数学分析方法, 并在研究波的奇性传播以及偏微分方程的解的正则性方面取得了突破性的进展. 最初这类研究工作集中于解决线性偏微分方程的若干基础问题, 因此称为线性微局部分析, 其鼎盛时期是 20 世纪六七十年代. 微局部分析理论集结了精细的调和与分析方法、流形上余切空间的辛几何理论以及代数几何的层理论等, 在奇性 (波前集) 传播、局部可解性、量子化和半经典分析等偏微分方程的若干基础问题的研究中起到了关键作用.

在 20 世纪 80 年代初, 法国数学家 J. M. Bony 首先使用微局部分析方法研究非线性偏微分方程的奇异性传播理论, 从而建立了与拟微分算子类似的仿微分算子理论. 现在研究的是非线性偏微分方程, 有更广泛的物理背景和复杂的结构, 其微局部结构也更丰富, 这时面对的问题和使用的方法与线性问题有本质的差别, 因此相应的理论称为非线性微局部分析理论. 现在这一理论已经发展得相当完善, 前期主要研究经典解的弱奇性的传播、非线性退化型椭圆方程的经典解的光滑性等, 这些研究结果与线性方程的研究结果有很多类似的地方. 进入 21 世纪以后, 大家更关注具体的数学物理方程, 比如流体力学纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程、欧拉 (Euler) 方程、普朗特 (Prandtl) 边界层方程、动理学玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程和朗道 (Landau) 方程等, 这些非线性方程都有非常复杂的微局部结构. 以 J. Y. Chemin 为代表的法国学派, 利用非线性微局部分析的方法研究流体力学方程的解的存在性以及整体特性, 比如二维不可压缩欧拉方程的整体解的存在性等. 本书作者近二十几年的工作也是利用非线性微局部分析研究几类数学物理方程, 我们研究动理学玻尔兹曼方程、朗道方程和普朗特边界层方程的微局部退化结构, 引入相应的各向异性范数和权函数, 研究这些方程柯西问题解的存在性. 同时我们研究柯西问题的解析光滑效应, 除了介绍经典的傅里叶变换方法, 也介绍本书作者首次引入的研究退化抛物型方程的解析向量方法. 非线性微局部分析理论在对这些方程的研究中发挥了重要的作用.

本书将从最基础的傅里叶变换、广义函数和索伯列夫空间理论开始, 介绍微局部分析的基础知识. 我们只选取研究非线性微局部分析理论时确实需要的基础理论部分, 因此仅仅介绍拟微分算子象征运算的基础知识, 而没有涉及完整的拟微分算子理论, 比如: 余切流形和辛流形上的象征运算、拟微分算子象征特征集的分类、拟微分算子的局部可解性等. 我们将简单介绍与非线性分析相关的李特尔伍德-佩利 (Littlewood-Paley) 二进分解理论, 这是非线性微局部分析的基本工具. 使用李特尔伍德-佩利二进分解可以特征化索伯列夫空间、赫尔德空间和定义别索夫空间, 进而将拟微分算子理论推广到具有非光滑象征的仿微分算子理论. 我们也只是介绍仿微分算子理论的基础部分, 然后介绍本书作者熟悉的非线性微局部分析理论在几类非线性偏微分方程研究中的应用, 主要包括: 非线性退化椭圆型方程的经典解的无穷小微光滑性、动理学方程 (玻尔兹曼方程和朗道方程) 柯西问题的解析——热夫雷光滑效应, 以及普朗特边界层方程初边值问题的热夫雷光滑效应等问题. 这些方程都是退化非线性椭圆型或抛物型方程. 但本书所关注的是非线性微局部分析基础理论在这几类非线性偏微分方程中的应用, 因此没有介绍相应的偏微分方程的物理背景. 同样, 我们也没有介绍完整的非线性微局部分析理论的结果. 特别地, 我们没有介绍 J. M. Bony 的非线性偏微分方程的奇异性分析理论, 也没有介绍 J. Y. Chemin 等法国学者关于流体力学方程的非线性微局部分析理论. 关于这方面的工作, 已经有很多相关的专著和综合论文介绍, 请参见 [13, 37, 40-42, 44, 99] 等文献.

本书的基础部分包含了作者多年来在“全国暑期偏微分方程讲习班”的几次短期课程的讲义, 也包含了作者在法国鲁昂大学、日本京都大学和武汉大学等高校开设的研究生专业课的讲义, 同时也收集并整理了作者最近这些年使用微局部分析方法研究非线性偏微分方程获得的最新研究成果, 主要是关于动理学方程 (朗道方程和玻尔兹曼方程) 与普朗特边界层方程的科研成果.

本书得到了国家出版基金、国家自然科学基金 (批准号: 12031006, 12325108, 12131017, 12221001)、中央高校基本科研业务费 (批准号: 90YAH19044) 和湖北省自然科学基金 (批准号: 2019CFA007) 的资助.

因作者水平有限, 从素材的取舍到内容的组织都难免有不足之处. 恳请读者不吝赐教. 来信请发邮件至: xuchaojiang@nuaa.edu.cn, wei-xi.li@whu.edu.cn, hm-caocao_91@nuaa.edu.cn.

作 者

2026 年 6 月

目 录

“现代数学基础丛书”序

前言

第 1 章	经典傅里叶变换	1
1.1	可积函数的傅里叶变换	1
1.2	函数的卷积	6
1.3	施瓦兹急减函数	15
1.4	施瓦兹急减函数的傅里叶变换	17
1.5	佩利-维纳定理	21
第 2 章	广义函数的傅里叶变换	25
2.1	广义函数的基本性质	25
2.2	缓增广义函数	30
2.3	缓增广义函数的傅里叶变换	33
2.4	佩利-维纳-施瓦兹定理	39
2.5	广义函数的卷积和磨光化	42
第 3 章	索伯列夫空间	51
3.1	索伯列夫空间的基本性质	51
3.2	索伯列夫嵌入引理	55
3.3	迹定理和延拓定理	59
3.4	开区域上的索伯列夫空间	67
3.5	齐次-周期索伯列夫空间	70
第 4 章	拟微分算子理论	78
4.1	拟微分算子的象征类及渐近表示	78
4.2	拟微分算子的基本性质	84
4.3	索伯列夫空间上的连续性	89
4.4	非负象征的拟微分算子	92
4.5	外尔-霍尔曼德尔量子化	94
4.6	二阶线性椭圆方程的解的光滑性	97
第 5 章	李特尔伍德-佩利理论	101
5.1	李特尔伍德-佩利二进分解	101

5.2	索伯列夫空间的特征化	107
5.3	赫尔德空间的特征化	111
5.4	别索夫空间的基本性质	116
5.5	偏微分方程分析中的常用不等式	122
第 6 章	Bony 仿微分理论	148
6.1	代数函数空间	148
6.2	Bony 仿乘积的基本性质	150
6.3	仿微分算子的基本性质	154
6.4	别索夫空间上的仿微分运算	161
6.5	二阶半线性椭圆方程的弱解的光滑性	163
第 7 章	二阶亚椭圆方程	166
7.1	二阶线性亚椭圆方程	166
7.2	二阶非线性亚椭圆方程	177
7.3	非角截断玻尔兹曼算子	179
7.4	线性玻尔兹曼算子的次椭圆性	191
7.5	动理学朗道方程	201
第 8 章	动理学方程的解析光滑效应	204
8.1	二阶线性抛物型方程	205
8.2	空间齐性非线性动理学方程	215
8.3	空间非齐性线性动理学方程	221
8.4	硬势情形的动理学朗道方程	230
8.5	福克尔-普朗克方程和“解析向量”	237
8.6	硬势情形的动理学玻尔兹曼方程	240
第 9 章	普朗特边界层方程	260
9.1	普朗特方程的微局部退化结构	261
9.2	索伯列夫空间适定性	264
9.3	切向变量热夫雷光滑效应	267
9.4	热夫雷空间适定性	282
附录		291
A.1	多变元函数的微分-积分运算	291
A.2	实变函数的一些基本定理	294
A.3	泛函分析的一些基本定理	297
参考文献		303
索引		316
“现代数学基础丛书”已出版书目		

第 1 章 经典傅里叶变换

傅里叶变换是调和分析的基础, 我们现在简单地介绍勒贝格 (Lebesgue) 可积函数空间的傅里叶 (Fourier) 变换理论. 这是数学分析的经典理论基础, 因此有很多这方面的专门著作, 读者可以参考相关的文献 [10, 24, 39, 48, 49, 66].

1.1 可积函数的傅里叶变换

首先引进一些多变元的记号, 对于 $d \geq 1$, 记

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad |x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2)^{1/2},$$

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j y_j,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \quad (\text{注意不要与 } |x| \text{ 混淆}).$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad \partial^\alpha = \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d},$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \dots, d.$$

对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $\alpha \leq \beta$,

$$\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \binom{\beta_2}{\alpha_2} \cdots \binom{\beta_d}{\alpha_d} = \frac{\beta!}{\alpha! (\beta - \alpha)!}.$$

多变量的牛顿 (Newton) 公式

$$(x + y)^\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta},$$

多变量高阶莱布尼茨 (Leibniz) 公式

$$\partial_x^\alpha (f g) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_x^\beta f) (\partial_x^{\alpha - \beta} g),$$

带积分余项的泰勒 (Taylor) 公式

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(y) (x - y)^\alpha \\ + \int_0^1 \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} (x - y)^\alpha (\partial^\alpha f)(y + t(x - y)) (1 - t)^{m-1} dt.$$

使用这些多重指标记号, 形式上多变量与单变量的记号是一样的, 但是在做具体计算的时候还是需要特别小心, 应该按照上面的定义展开后再详细计算.

定义 1.1.1 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个开区域.

- 假设 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$C^k(\Omega) = \{f : f, \partial_x^\alpha f \text{ 都是 } \Omega \text{ 上的连续函数, } |\alpha| \leq k\}.$$

- 假设 $0 < p \leq \infty$, 定义

$$L^p(\Omega) = \{f : f \text{ 是定义在 } \Omega \text{ 上的可测函数, 以及 } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

这里

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

以及

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

- 如果 K 是 Ω 上的有界闭子集, 则称 K 为紧集, 记为 $K \subset\subset \Omega$.

关于序列空间, 我们有下面的定义.

定义 1.1.2 假设 $1 \leq p \leq \infty$, 定义

$$\ell^p(\mathbb{K}^n) = \{a : a = \{a_j, j \in \mathbb{K}^n\}; \|a\|_{\ell^p(\mathbb{K}^n)} < \infty\},$$

这里

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{K}^n)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{K}^n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

以及

$$\|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{K}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{K}^n} \{|a_j|\},$$

其中 $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, 或者 $\mathbb{K} = \mathbb{N}, n \geq 1$.

现在定义可积函数的傅里叶变换.

定义 1.1.3 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ -勒贝格绝对可积函数空间, 它的傅里叶变换 $\widehat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 定义为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

这里 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位.

• 这个积分是有意义的, 因为 $|e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)| = |f(x)|$ 是关于 x 在 $\mathbb{R}^d$ 上的绝对可积函数.

• 我们将同时使用记号 $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$.

从傅里叶变换的定义可以立即导出下面的基本性质:

• 线性映射, 任给 $a, b \in \mathbb{C}, f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

• 平移性, 任给 $c \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\mathcal{F}(f(\cdot - c)) = e^{-i\langle c, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi).$$

• 任给 $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\mathcal{F}(e^{i\langle \cdot, \xi_0 \rangle} f(\cdot)) = \widehat{f}(\xi - \xi_0).$$

• 假设 A 是一个 $d \times d$ 实系数可逆矩阵, 则

$$\mathcal{F}(f(A\cdot)) = \frac{1}{|\det A|} \widehat{f}(A^{-1}\xi),$$

这里 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵, $\det A$ 是矩阵 A 的行列式.

• $\mathcal{F}(\overline{f}(\cdot)) = \overline{\widehat{f}}(-\xi)$, 这里 $\overline{f}$ 是复共轭.

对于 $k \in \mathbb{N}$, 定义函数空间:

$$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d) = \left\{ g : g \in C^k(\mathbb{R}^d); \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\partial^\alpha g(x)| = 0, |\alpha| \leq k \right\},$$

以及相应的范数:

$$\|g\|_{\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha g(x)|.$$

定理 1.1.1 (黎曼-勒贝格定理) 假设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\widehat{f}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一个有界连续函数, 满足

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0,$$

而且

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

因此, $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ 是连续映射.

证明 由定义

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx,$$

被积函数 $e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)$ 对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^d$ 关于 ξ 是连续函数, 而且

$$|f(x)e^{-i\langle x, \xi \rangle}| = |f(x)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

右边关于 x 是可积的. 因此由勒贝格控制收敛定理, 关于 ξ 作为参变量是连续函数, 至于其有界性, 可以立即得到

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (1.1.1)$$

下面证明

$$|\widehat{f}(\xi)| \rightarrow 0 \quad (|\xi| \rightarrow +\infty),$$

即任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|\xi| \geq R$ 时, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$.

因为 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数, 利用鲁金定理 (见附录中的定理 A.2.2), 存在一个分片常数函数 (一个变量的时候可以选取阶梯函数) φ , 而且这个函数在有界区域之外等于 0, 使得

$$\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此利用 (1.1.1), 立即得到

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

为了简化记号, 我们仅仅考虑 $d = 1$ 的情形,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{1}_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}(x),$$

这里 $-\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < +\infty$, 由傅里叶变换的线性性, 有 (对于 $\xi \neq 0$)

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n C_k \mathbf{1}_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]} \right) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \sum_{k=1}^n C_k \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{iC_k}{\xi} (e^{-i\langle \alpha_k, \xi \rangle} - e^{-i\langle \alpha_{k-1}, \xi \rangle}).\end{aligned}$$

因此当 $\xi \neq 0$ 时,

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \left(\sum_{k=1}^n |C_k| \right) \frac{2}{|\xi|}.$$

所以存在 $R > 0$, 当 $|\xi| \geq R$ 时,

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \varepsilon/2 \implies |\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| + |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \varepsilon, \quad |\xi| \geq R.$$

当 $d > 1$ 时, 证明是完全类似的.

命题 1.1.1 假设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 以及 $\partial_{x_j} f, j = 1, \dots, d$ 存在且属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = (i\xi_j) \mathcal{F}(f) = (i\xi_j) \widehat{f}(\xi), \quad j = 1, \dots, d.$$

此外, 若 $m \in \mathbb{N}$ 以及对于所有的 $\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m$ 有 $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m.$$

证明 我们仅仅对 $d = 1$ 给出证明, 将高维情形的证明留给读者.

这里的假设条件: $\partial_{x_j} f, j = 1, \dots, d$ 存在, 是一个比较含糊的表达, 一般情况下应该理解成广义函数意义下的弱微分. 我们首先简单地假设 $f, \partial_{x_j} f (j = 1, \dots, d)$ 都是 $\mathbb{R}^d$ 上的连续函数, 则由分部积分公式有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= [f(x) e^{-ix \cdot \xi}]_{-\infty}^{+\infty} + (i\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.\end{aligned}$$

因此只需要证明 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ 存在 (由 f 的可积性就可以导出这个极限等于 0). 另

一方面, 由牛顿-莱布尼茨公式 (见引理 A.2.1), 有

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

由于 $f' \in L^1(\mathbb{R})$, 因此这个极限当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时存在. 这就证明了

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = (i\xi)\widehat{f}(\xi).$$

高阶微分的情形由归纳法证得.

最后考虑广义函数意义下的弱微分, 也仅仅考虑一个变量的情形. 假设在广义函数意义下有 $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, 则利用广义函数意义下的牛顿-莱布尼茨公式, 我们可以证明 f 是连续函数, 后面的证明就和上面的一样.

推论 1.1.1 若对于所有的 $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq m$ 有 $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则存在 $C > 0, R > 0$ 使得

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^m}, \quad |\xi| > R.$$

命题 1.1.2 傅里叶变换还有下列性质: 假设 $m \in \mathbb{N}$ 以及对于所有的 $\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m$ 有 $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\widehat{f} \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ 以及

$$\partial_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x)).$$

这个命题的证明直接使用关于带参变量的积分和微分交换顺序的勒贝格控制收敛定理, 即

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_\xi^\alpha (f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (-ix)^\alpha f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x)), \end{aligned}$$

这里用到了假设条件

$$|\partial_\xi^\alpha (f(x) e^{-ix \cdot \xi})| = |x^\alpha f(x)| \in L^1(\mathbb{R}_x^d).$$

1.2 函数的卷积

定义 1.2.1 我们首先给出如下定义.

(1) 对于 $f \in C^0(\Omega)$, 定义 f 的支集

$$\text{Supp } f = \overline{\{x : x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

因此 $\text{Supp } f$ 是 Ω 的一个相对闭集.

(2) 定义

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f : f \in C^\infty(\Omega); \text{Supp } f \text{ 为 } \Omega \text{ 的紧子集}\}.$$

(3) 定义

$$L_{\text{loc}}^1(\Omega) = \{f : f \text{ 是 } \Omega \text{ 上的可测函数, 以及 } f \text{ 在 } \Omega \text{ 的任意紧子集 } K \text{ 上绝对可积}\}.$$

首先 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 非空, 令

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

则可以证明 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, 以及 $\text{Supp } \psi = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$. 事实上仅仅需要验证: 任给 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\psi^{(n)}(0\pm) = 0.$$

然后令

$$\varphi(x) = \psi(1 - |x|^2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

则 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{Supp } \varphi = \overline{B(0, 1)}$. 通过伸缩变换和平移变换可以证明 $C_0^\infty(\Omega)$ 非空.

引理 1.2.1 假设 $f \in C^0(\Omega)$, 若

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则 $f \equiv 0$ (在 Ω 上).

证明 反证法. 假设 $x_0 \in \Omega, f(x_0) \neq 0$ (不妨设 $f(x_0) > 0$), 则存在 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) > 0, \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \subset \Omega.$$

令 $\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right)$, 则 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\text{Supp } \varphi = \overline{B(x_0, \delta)},$$

但是由题设条件

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi_0 \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) dx \\ &\geq \int_{B(x_0, \frac{\delta}{2})} f(x) \varphi_0 \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) e^{-\frac{4}{3}\delta} > 0, \end{aligned}$$

由此得到矛盾, 因此必须有 $f \equiv 0$ (在 Ω 上).

定义 1.2.2 假设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 以及 ω 是 Ω 的开子集, 称 $f|_{\omega} \equiv 0$, 若

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\omega),$$

定义 f 的支集

$$\text{Supp } f = \{x : f(x) \not\equiv 0 \text{ 的最大开子集的余集}\}.$$

因此 $\text{Supp } f$ 是 Ω 的相对闭子集.

需要指出的是, 这里的 $f|_{\omega} \equiv 0$ 实际上是 f 在 ω 上几乎处处等于 0.

我们现在研究函数的卷积: 对于 $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 形式地定义这两个函数的卷积

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

命题 1.2.1 关于两个函数的卷积, 有下列基本性质:

- (1) 如果 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
- (2) 如果 $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $f * g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$.
- (3) 如果 $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 其中一个函数有紧支集, 则 $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
- (4) 卷积有交换律和结合律, 即 $f * g = g * f$, $f * (g * h) = (f * g) * h$.

证明 我们在这里仅仅证明相应的不等式, 至于卷积中积分的意义则可以由得到的不等式直接给出.

(1) 假设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 应用富比尼定理 (见引理 A.1.4), 得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f * g|(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x - t) dt \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| |g(x - t)| dt \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| |g(x - t)| dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-t)| dx dt \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(2) 假设 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 直接计算

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| |g(x-t)| dt \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-t)| dt \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(3) 假设 $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, K 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个紧集, 以及在 $\mathbb{R}^d \setminus K$ 上 g 几乎处处等于 0, 则任给紧集 $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^d$, 有

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{K}} |f * g|(x) dx &= \int_{\tilde{K}} \left| \int_K f(x-t) g(t) dt \right| dx \\
&\leq \int_K |g(t)| \left(\int_{\tilde{K}} |f(x-t)| dx \right) dt \\
&\leq \int_K |g(t)| \left(\int_{\{\tilde{K}-t\}} |f(\tilde{x})| d\tilde{x} \right) dt \\
&\leq \int_K |g(t)| \left(\int_{K'} |f(\tilde{x})| d\tilde{x} \right) dt \\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^1(K')},
\end{aligned}$$

这里

$$\{\tilde{K}-t\} = \{x : x = y-t \in \mathbb{R}^d; y \in \tilde{K}\},$$

以及

$$K' = \{x : x = y-t \in \mathbb{R}^d; y \in \tilde{K}, t \in K\}$$

也是 $\mathbb{R}^d$ 的一个紧集, 因此 $f * g$ 在 $\tilde{K}$ 上可积, 这就证明了 $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

(4) 因为卷积中的积分定义在全空间, 所以 $f * g = g * f$, $f * (g * h) = (f * g) * h$ 的证明由简单的平移变量变换导出.

命题 1.2.2 假设 $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 以及其中一个函数具有紧支集, 则 $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ 以及

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

证明 首先, $C^k(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 因此卷积有定义, 而且 $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. 我们仅需证明: 任给 $R > 0$, 有

$$f * g \in C^k(B(0, R)).$$

假设 $\text{Supp } g \subset \overline{B(0, R_1)}$, 若 $x \in B(0, R)$, $y \in \overline{B(0, R_1)}$, 则

$$x - y \in \overline{B(0, (R + R_1))} = K,$$

以及

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha f| \leq M_k < +\infty.$$

下面用归纳法证明 $k = 0$, 即证明 $f * g$ 是连续的.

- 任给 $x \in \overline{B(0, R)}$, 映射 $y \mapsto f(x - y)g(y)$ 是可测的.
- 对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^d$, 映射 $x \mapsto f(x - y)g(y)$ 是连续的.
- $|f(x - y)g(y)| \leq M_k |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall x \in \overline{B(0, R_1)}$.

令 $x_j \rightarrow x_0$ (在 $\overline{B(0, R)}$ 中), 则由勒贝格控制收敛定理有

$$f * g(x_j) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_j - y)g(y)dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0 - y)g(y)dy.$$

因此 $f * g$ 在 x_0 点连续.

现在假设已证明 $f * g \in C^{k-1}(B(0, R))$, 再证明 $f * g \in C^k(B(0, R))$, 即证明

$$\partial^\beta (f * g) = (\partial^\beta f) * g \in C^1(B(0, R)), \quad \forall |\beta| \leq k - 1.$$

我们还要用到在下面的积分符号下微分的勒贝格控制收敛定理.

- 任给 $x \in \overline{B(0, R)}$, $|\beta| \leq k - 1$, $y \mapsto (\partial^\beta f)(x - y)g(y)$ 可测.
- 对于几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^d$, $|\beta| \leq k - 1$, $x \mapsto (\partial^\beta f)(x - y)g(y)$ 可微.
- $|\partial_x(\partial^\beta f)(x - y)g(y)| \leq M_k |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall x \in B(0, R)$.

由此导出 $(\partial^\beta f) * g \in C^1(B(0, R))$ 以及 $\partial_x(\partial^\beta f) * g = (\partial_x \partial^\beta f) * g$.

注 1.2.1 从命题 1.2.2 的证明立即可以得到