

丛 书 序

随着信息通信技术的飞速发展，第六代移动通信(6G)系统的研究与探索已在全球范围内如火如荼地展开。与第五代移动通信(5G)系统相比，6G 不仅延续了高速率、低时延和大规模连接的要求，还提出了全新的应用场景，如智能通信融合、通信感知一体化、具身智能等，进一步拓展了移动通信的服务范围，推动万物智联的实现。

为达成上述目标，6G 在基础理论研究、新型无线技术、新型网络技术、新型安全技术等方面需要进行全新的设计和创新，旨在构建全覆盖的空天地一体化网络，提供超高速率的传输能力、超低时延的通信体验，以及更高的能量效率和安全保障。近期，针对 6G 发展涌现出一系列理论和关键技术成果，包括语义信息论等基础理论研究的突破，卫星通信、智能超表面、太赫兹通信、毫米波雷达感知等关键技术的引入，标志着移动通信系统从传统的面向连接向面向智能的重大转变。

为推动 6G 系统的研究与发展，我们组织策划了这套“6G 信息通信网络丛书”。本丛书邀请通信领域的多位院士、专家组成编委会，分册由相关领域的专家撰写，内容涵盖 6G 的基础理论和关键核心技术。其中，语义信息论作为基础理论，深入探讨了语义信息度量和编码定理，为 6G 演进提供了重要的理论基础和技术路径。丛书对增强型无线空口技术、新型频谱技术、跨域融合技术、关键共性技术、新型网络架构、新型组网技术、低功耗绿色通信技术、先进网络技术，以及网络物理层安全技术等 6G 核心技术的研究成果进行了介绍。各分册均基于当前最新的研究进展，深入探讨了 6G 的发展方向，并强调了其在各行业的应用前景，具有鲜明的特色。

6G 的研究与发展是我国“十四五”规划的重要内容，是实现“数字中国”战略的关键支撑。本丛书的出版，正是为了推动 6G 研究的深入发展，汇聚全球智慧，促进技术与产业的深度融合，从而助力我国在 6G 领域的技术创新与产业发展，巩固我国在全球通信领域的领先地位。



主 编

中国工程院院士

前 言

随着移动通信技术的不断演进，6G 通信系统正逐步从概念探索迈向关键技术攻关阶段。作为未来信息社会的核心基础设施，6G 不仅将在通信速率、连接密度和时延等传统指标上实现跨越式提升，更将在智能化、绿色化以及通感一体化等方面引领发展新潮流。面对超高速率、超大连接和超高可靠性等多重需求，编码、调制与波形作为物理层设计的三大核心技术，其协同演进对实现 6G 的技术目标具有至关重要的意义。

本书围绕编码、调制与波形三个维度展开系统论述，力求从理论基础、算法设计到工程应用全面呈现相关技术的发展趋势与最新进展。

第 1 章涵盖全书所有章节的重点知识，介绍编码、调制与波形技术的发展现状与前景。

第一部分涵盖两章内容。第 2 章聚焦于极化码的基础理论，深入分析其构造方法、打孔机制与编译码策略；第 3 章探讨极化调整卷积码的编译码技术，该方法融合极化结构与卷积机制，在保持优良误码性能的同时，显著提升了解码灵活性与硬件可实现性。

第二部分重点讨论在高频谱效率(简称高谱效)与低实现复杂度之间取得平衡的新型技术路径。第 4 章介绍面向高谱效的叠加编码调制技术，通过编码与调制一体化设计，有效降低接收端复杂度；第 5 章则关注低成本的新型调制技术，包括相移器辅助的空分复用与可重构智能表面调制方法，在降低硬件开销的同时保持良好的系统性能。

第三部分探讨满足 6G 多样化应用场景需求的波形设计。第 6 章介绍正交时频空波形，该类波形兼具良好的多维正交性与抗干扰能力，能够有效抵御信道衰落及多类干扰；第 7 章则讨论恒包络正交频分复用波形，其在降低功放复杂度与提升能效方面展现出独特优势，尤其适用于卫星通信、高空平台与低功耗物联网等场景。

全书注重理论与实践的有机结合，内容体系完整、结构条理清晰，既反映了学术前沿进展，也兼顾了工程应用需求。

本书在撰写过程中，广泛借鉴了国内外最新研究成果，并得到了诸多专家学

者的指导与帮助，在此谨致衷心感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

作 者

2026 年 2 月

目 录

丛书序

前言

第 1 章	面向 6G 的编码调制波形发展趋势	1
1.1	6G 新场景新业务的技术需求	1
1.2	可普适近容限的编码方法	2
1.3	高谱效低成本的调制技术	3
1.4	宽场景多业务的波形设计	4
第 2 章	极化码编译码技术	6
2.1	极化码发展概述	6
2.2	信道极化	7
2.2.1	B-DMC 信道模型	7
2.2.2	极化理论	8
2.2.3	信道联合	12
2.2.4	信道分裂	13
2.3	极化码构造	13
2.3.1	巴氏参数构造	14
2.3.2	高斯近似构造	15
2.3.3	极化权重构造	16
2.4	极化码打孔	19
2.4.1	近似均匀打孔	19
2.4.2	基于改进高斯近似的打孔	20
2.5	极化码编码	21
2.6	极化码译码	22
2.6.1	SC 译码	22
2.6.2	SCL 译码	24
2.6.3	CA-SCL 译码	25
2.6.4	BP 译码	25
2.7	性能仿真	28
	参考文献	31

第 3 章 极化调整卷积码编译码技术	32
3.1 PAC 码发展概述	32
3.2 PAC 码系统模型	34
3.3 PAC 码编码	35
3.3.1 卷积变换	35
3.3.2 极化变换	36
3.4 PAC 码构造	37
3.4.1 RM 构造	37
3.4.2 CT 构造	40
3.4.3 WS 构造	41
3.4.4 基于联合上界的 PAC 码递归构造	43
3.4.5 基于蒙特卡罗仿真的 PAC 码递归构造	45
3.4.6 RM 规则辅助的递归构造	46
3.5 PAC 码打孔算法	46
3.5.1 基于高斯近似的打孔策略	46
3.5.2 带有卷积预编码的打孔方案	47
3.5.3 基于逆向映射的优化方案	48
3.5.4 基于偏序关系的递归式打孔	51
3.5.5 基于 RM 规则辅助的打孔	52
3.6 PAC 码的译码	53
3.6.1 费诺译码	53
3.6.2 SCL 译码	56
3.7 性能仿真	59
参考文献	62
第 4 章 面向高谱效的叠加编码调制技术	65
4.1 叠加编码调制发展概述	65
4.2 叠加编码调制系统模型	66
4.2.1 单层结构和多层结构	67
4.2.2 一维映射和二维映射	67
4.3 叠加编码调制信号检测	70
4.3.1 高斯近似检测	71
4.3.2 后验概率检测	75
4.3.3 软译码	77
4.3.4 性能仿真	78
参考文献	81

第 5 章 面向低成本的新型调制技术	83
5.1 相移器辅助的空分复用技术	83
5.1.1 发展概述	83
5.1.2 系统模型	84
5.1.3 信号检测	86
5.1.4 性能仿真	88
5.1.5 基于消息传递的检测	90
5.2 可重构智能表面辅助调制技术	95
5.2.1 发展概述	95
5.2.2 基本概念	97
5.2.3 RIS 辅助空移键控	99
5.2.4 RIS 辅助空间调制	101
5.2.5 大规模智能表面辅助广义空间调制	102
参考文献	108
第 6 章 正交时频空波形	111
6.1 基本原理	112
6.1.1 时延-多普勒域变换	112
6.1.2 发射端基本原理	112
6.1.3 接收端基本原理	113
6.2 时延-多普勒域与各领域之间的转化关系	114
6.3 信道估计方案	116
6.3.1 基于全保护带的估计	116
6.3.2 基于部分保护带的估计	117
6.3.3 基于导频叠加的估计	118
6.3.4 估计性能	119
6.4 信号检测方案	120
6.4.1 最小均方误差检测	121
6.4.2 近似消息传递检测	122
6.4.3 期望传播检测	126
6.4.4 仿真结果	130
参考文献	132
第 7 章 恒包络正交频分复用波形	134
7.1 基本波形	134
7.1.1 恒包络调制	134
7.1.2 频谱效率	137

7.1.3 连续相位调制	138
7.2 信号检测	141
7.2.1 最大似然检测技术	141
7.2.2 相位检测技术	145
7.2.3 其他相位检测技术	148
7.3 编译码处理	149
7.3.1 CE-OFDM 的软信息问题分析	149
7.3.2 适用于相位解调的软信息修正方法	151
7.3.3 基于低复杂度软信息的 LDPC 译码	153
7.4 波形优化	155
7.4.1 基于预编码的 CE-OFDM 技术	155
7.4.2 基于索引调制的 CE-OFDM 技术	157
7.5 多天线技术	161
7.5.1 系统介绍	161
7.5.2 最优接收机	162
7.5.3 相位解调接收机	164
参考文献	165

第 1 章 面向 6G 的编码调制波形发展趋势

1.1 6G 新场景新业务的技术需求

移动通信技术是当代信息社会深刻变革的关键驱动力。自 20 世纪 80 年代第一代移动通信系统问世以来，移动通信技术形态历经多轮迭代与革新：从第一代(first generation, 1G)与第二代(second generation, 2G)阶段满足基础语音服务并不断提升语音质量，到第三代(third generation, 3G)突破传统语音通信的局限，为高速数据传输开启新纪元；再至第四代(fourth generation, 4G)大幅提升数据传输速率，显著推动了移动互联网的蓬勃发展。每一代技术的演进，都显著提高了数据传输能力，使用户能够在极短的时隙内完成通信与数据处理，从而深刻重塑了信息交互的基本形态。

在移动通信技术不断迭代升级的进程中，其应用场景与技术需求也经历了深刻的转变。早期的移动通信主要面向传统电信业务，着力提高语音通信质量和数据传输速率。然而，随着社会发展和应用边界的持续拓展，通信需求早已超越单一的语音与数据传输，逐步演变为更加多元而复杂的业务形态。第五代(fifth generation, 5G)移动通信系统的出现正是这一演进历程中的关键节点：它不仅带来了更高速率的网络接入，更将物联网(internet of things, IoT)、智能家居与自动驾驶等诸多新兴垂直行业和应用场景变为现实，为“万物互联”时代的到来提供了强大动力。

迈入第六代(sixth generation, 6G)移动通信阶段，这一趋势更加明晰并不可逆转。2023 年 6 月，国际电信联盟正式发布《面向国际移动通信 2030》(international mobile telecommunications-2030, IMT-2030)建议书，首次明确了 6G 将重点发展的六大典型应用场景，包括沉浸式通信、超大规模连接、极高可靠低时延、人工智能与通信的深度融合、感知与通信的有机耦合以及泛在连接。该建议书的出台不仅为 6G 的未来发展勾勒了整体蓝图，也预示着 6G 时代的核心竞争力将不再局限于通信速率的提升，而是一场涵盖智能化、融合化与全域覆盖的系统性技术变革。与此同时，6G 不仅强调单一指标的突破，更要求在诸多复杂场景下，实现多种性能要素之间的精确平衡。

要实现这一宏大愿景，现有的编码、调制与波形等物理层传输技术正面临前所未有的挑战。首先，为满足超低时延与极高可靠性的严苛要求，编码技术不仅

需在复杂信道环境下保持稳健性，还要突破有限码长的性能瓶颈，从而在各种灵活配置下均实现高效可靠传输；其次，调制方案必须有效对抗复杂环境中的信道衰落与干扰，并进一步提高频谱利用效率，同时兼顾物联网等新场景中的低成本实现需求；最后，波形设计应适配包括泛在连接在内的多元化场景，突破传统正交频分复用(orthogonal frequency division multiplexing, OFDM)体制，在更广泛的波形设计方案中寻找最优解，以应对不同频段、动态拓扑以及高速移动环境的新兴挑战。综上所述，需要在编码、调制与波形三大物理层核心技术方面实现创新与突破，以更好地支撑 6G 时代的全新愿景。

1.2 可普适近容限的编码方法

无线信道本质上不稳定，数据在传输过程中经常遭遇破坏。当错误无法纠正时，需要重传，这可能导致严重的延迟，从而影响用户体验。信道编码是所有通信系统中确保数据可靠性和高效传输的核心技术。通过向数据添加冗余，信道编码可以让接收方检测和纠正在传输过程中由于噪声、干扰和信道衰落等因素产生的错误，减少数据重传次数，在提高蜂窝网络的关键性能指标(key performance indicator, KPI)方面起着至关重要的作用。

如表 1-1 所示，随着移动通信从 2G 到 5G 的发展，信道编码技术不断演进，以应对更复杂的信道条件和更高的数据速率需求。在 2G 网络中，主要采用卷积码配合交织技术来对抗信道中的突发错误，以适应窄带通信的需求。到了 3G 时代，Turbo 码技术开始成为主流。它结合了软判决译码和迭代处理技术，更加适合高速数据传输，使得 3G 网络能够支持更高的数据吞吐量和更稳定的通信质量。4G 系统在数据信道中沿用了 Turbo 码技术，而对于控制信道采用了复杂度较低的咬尾卷积码，以提高译码效率。

表 1-1 2G 到 5G 使用的信道编码方案

通信代际	信道编码
2G	循环码(FIRE/CRC)、卷积码
3G	卷积码、Turbo 码
4G	咬尾卷积码、Turbo 码
5G	极化码、LDPC 码

在 5G 标准的制定过程中，信道编码技术发生了重大变化。2016 年 11 月，第三代合作伙伴计划无线接入网络接口(3rd generation partnership project radio

access network interface, 3GPP RAN)第87次会议上展开了关于5G信道编码技术方案的讨论, 候选方案包括低密度奇偶校验(low-density parity-check, LDPC)码、Turbo 2.0 码以及极化码(polar code, PC)。经过激烈的讨论和技术评估, 确定不同的信道编码方案应用于不同传输场景。在5G的增强移动宽带(enhanced mobile broadband, eMBB)场景中, 选用了LDPC码作为数据信道的编码标准。LDPC码的误码性能较好、解码复杂度较低, 特别适合大数据吞吐量的场景; 其并行解码特性在硬件实现上也具备优势。然而, 为了确保校验矩阵的稀疏性和纠错性能, LDPC码的设计依赖于复杂的优化过程, 且在短码条件下性能有限。因此, 5G控制信道的编码方案采用了极化码。极化码是首个被证明能够达到信道容量的编码方案, 因其在码长受限和低信噪比条件下的优异性能而备受关注。其独特的“信道极化”机制使得部分信道传输几乎无损, 从而使极化码在控制信道编码中具备了良好的鲁棒性。

从极化码的发展趋势来看, 其在有限码长下的极化效果不够充分, 这使得短码条件下性能仍然有待提升。为了改善这一问题, Arikan 于2019年提出了一种将极化码与卷积码相结合的编码方案, 称为极化调整卷积(polarization-adjusted convolutional, PAC)码。研究表明, PAC码在短码长条件下有效提高了译码性能。例如, 在码长为128、码率为0.5的情况下, PAC码的误块率(block error ratio, BLER)能够接近二进制输入加性高斯白噪声(binary-input additive white Gaussian noise, BIAWGN)信道的散度近似边界。

6G应用场景和性能指标将更加多元化, 这对信道编码技术提出了更严苛的要求。例如, 6G信道编码需在极低误比特率(bit error rate, BER)的前提下实现快速响应, 以确保数据准确、实时传输; 同时, 为适应物联网设备、传感器网络等数据传输量小、实时性高的应用, 信道编码需要在短块长度下保持优异性能。此外, 随着6G对超大规模数据传输的需求增加, 信道编码需支持高吞吐量场景, 同时保持灵活的码长和码率配置。

综上所述, 6G系统需要构建统一的编译码架构, 以兼顾多样化的通信场景和业务需求。而极化码和PAC码在宽范围的码长和码率条件下均表现出优异的稳定性和纠错性能, 其统一的码构造和编译码技术可支撑可靠的传输性能。因此, 本书将重点介绍极化码与PAC码, 阐明其基本原理及理论成果。

1.3 高谱效低成本的调制技术

随着6G通信场景的扩展, 虚拟现实、全息通信和增强现实等沉浸式通信业务对系统提出了前所未有的挑战。为支持这些新业务的大规模、高速率、低延迟数据传输, 太赫兹高频通信、超大规模天线阵列等新技术应运而生。然而, 这些

技术也带来了高频段信道衰减严重、硬件实现代价昂贵等问题。在应对这些挑战时，作为通信系统物理层的核心技术之一，调制技术的创新与突破显得尤为重要。调制技术不仅能够提升系统频谱效率，还可以降低硬件复杂度并减少功耗，从而为 6G 系统的实现提供关键支撑。

尽管 5G 系统采用了包括相位偏移键控(phase shift keying, PSK)和正交振幅调制(quadrature amplitude modulation, QAM)在内的传统调制技术，这些方法在应对 6G 所需的更高数据速率等方面却已显得力不从心。随着 6G 系统对超低时延、高速率和高可靠性提出更加苛刻的需求，调制技术也将迎来进一步的突破与革新。通过对现有技术的调研，本书将面向 6G 的调制发展趋势归纳为两个方向：超高阶调制与低成本调制。前者通过增加调制阶数来提高频谱效率，从而在有限带宽条件下支持更高的数据传输速率；后者则侧重于在高频硬件设备成本高昂、资源受限的前提下，兼顾系统性能与实现成本的平衡。

超高阶调制技术旨在通过扩展星座映射来显著提升频谱效率。以高阶 QAM 为例，其通过对星座图进行更密集的映射，从而提高单位带宽内的数据传输速率。然而，随着调制阶数的不断攀升，解调复杂度也呈指数式增长，尤其在多用户、多信道干扰等复杂场景中，传统解调方法往往难以兼顾效率与精度。针对上述难题，叠加编码调制(superposition code modulation, SCM)聚焦于将多个独立的二进制编码序列以叠加方式形成多层调制信号，从而在发射端保持高频谱效率的同时，在接收端采用低复杂度的迭代检测算法来实现高效解调解码。更重要的是，SCM 通过将信道编码与调制技术深度融合，在提升频谱效率的同时，依旧能够保证较高的传输可靠性。基于此，本书将重点聚焦于 SCM 在超高阶调制中的应用，系统介绍其基本原理，包括发射机与接收机的结构设计、接收检测算法，以及不同解调策略下 SCM 的误比特率性能。

6G 对太赫兹和超大规模天线阵列通信的需求将大幅度提升硬件实现的成本。为了解决上述问题，基于无线通信中新材料和新技术的发展，本书也将致力于研究低成本的调制技术。一方面，利用低成本的相移器来辅助实现多天线系统中的数字调制，以降低射频链数量；另一方面，通过可重构智能表面等新材料来替代昂贵的射频链进行辅助调制，提升信息承载能力。上述低成本调制方案都为 6G 系统的实际部署提供了可行的技术路径。

1.4 宽场景多业务的波形设计

6G 网络面临着空、天、地一体化覆盖的全新挑战，这要求波形设计不再局限于传统地面网络的单一需求，而需要针对不同空间维度与网络环境，提供无缝的接入能力。特别是在低轨卫星、无人机、高铁等高速移动环境，以及物联网、

卫星通信等多样化场景中,传统 OFDM 波形已难以同时满足极高带宽、低时延及全域覆盖等综合需求。为此,本书所涉及的 6G 波形围绕两个重点应用方向展开:一方面解决高动态场景下的多普勒效应问题;另一方面应对低功耗场景中的峰均比挑战。

在高动态场景方面,正交空时频(orthogonal time frequency space, OTFS)波形凭借其独特的技术优势展现出强大潜力。与传统在频域或时域进行处理的 OFDM 波形不同,OTFS 将信号映射至时延-多普勒(delay-Doppler)域,通过在该域中对信道特征进行稀疏化处理,更有效地捕捉和利用信道时变特征,从而实现对高速移动与多普勒频移的鲁棒性。随着研究与标准化的不断推进,OTFS 在编码、调制、检测算法等方面的技术生态将不断完善,为 6G 网络全面覆盖与泛在连接提供关键支撑。

在低功耗场景方面,恒包络多载波波形(constant envelope orthogonal frequency division multiplexing, CE-OFDM)提供了一种有效提升功放效率的解决方案。CE-OFDM 通过在发射端对多载波信号进行预处理与包络控制,确保输出波形在绝大部分时间段内保持恒定的幅度。这种恒包络特性带来两大优势:首先,功放可在接近饱和区的高效率状态下工作,显著降低系统功耗并延长设备续航时间;其次,由于包络恒定,能够有效抑制因峰值与平均功率比(peak-to-average power ratio, PAPR)过高导致的非线性失真,避免对接收端的解调和信号恢复产生不利影响。这些特性对于卫星通信、高空平台以及低功耗物联网等应用尤其重要。更为关键的是,CE-OFDM 在保留多载波框架的同时,与传统 OFDM 技术保持高度兼容,有利于现有系统的升级部署和未来 6G 网络的混合组网。随着 6G 对低功耗、低成本、低复杂度的要求日益提高,CE-OFDM 有望在海量物联网设备接入、空间无线通信与传统地面网络融合等多场景中发挥重要作用。

第 2 章 极化码编译码技术

2009 年发明的极化码是首个被证明能够达到任意二元输入离散无记忆信道(binary-input discrete memoryless channel, B-DMC)对称容量的编码方案,其诞生标志着信道编码理论的一次重大突破。随着移动通信的发展迈向 6G 阶段,极化码被寄予厚望,其在短码长环境中的高效性和对多变信道条件的适应能力,与 6G 对多场景、高性能通信需求的多维平衡要求高度契合。极化码不仅能够在复杂的信道环境下展现出卓越的稳健性,还在支持 6G 应用场景方面展现出了巨大的发展潜力,为 6G 的超低时延与超高可靠传输目标提供了重要支撑。

极化码的主要优势在于其低复杂度的编码与译码方法,尤其是其串行抵消译码和串行抵消列表译码技术。这些技术不仅确保了极化码的优异性能,还显著降低了硬件实现的复杂度。与 LDPC 码和 Turbo 码相比,极化码在短码长场景下的表现尤为出色,能够契合信道对高可靠性和低延迟的需求。此外,极化码的结构化特性使得硬件实现更加简单高效、能耗也更低,非常适用于物联网应用场景中资源受限的设备。

本章将聚焦于极化码基础理论,深入探讨其信道极化机理,并介绍主流的构造方法、打孔方法与编译码方法。

2.1 极化码发展概述

2008 年,Arıkan 首次提出了信道极化的概念^[1],并在第二年系统地介绍了极化码,包括信道极化原理和极化码的编码与构造方法^[2]。随着对极化码研究的不断深入,大量的极化码构造方案纷纷涌现,如巴氏参数法^[2]、高斯近似法^[3]、密度进化法^[4]、退化-进化近似构造方法^[5]和极化权重法^[6]等。与此同时,Arıkan 还证明了极化码在 B-DMC 信道下的容量可达性,并提出了一种串行抵消(successive cancellation, SC)译码算法^[2],该译码算法仅存在单一的译码路径,其中在短码长下性能较差;此外,SC 译码算法基于串行处理,译码延时相对较高。2011 年,研究人员对 SC 译码使用二叉树理论分析,在译码树中引入了广度优先搜索的思想,提出了串行抵消列表(successive cancellation list, SCL)译码算法^[7]:该算法在每个译码阶段同时考虑多条译码路径,随着列表宽度增大,译码性能就越趋近于最大似然(maximum likelihood, ML)译码算法。为了进一步提高 SCL

译码的性能,文献[8]提出了一种将循环冗余校验(cyclic redundancy check, CRC)码与极化码级联的策略——CRC-辅助的 SCL(CRC-aided-SCL, CA-SCL)译码算法,用以辅助备选序列的选择。CA-SCL 译码策略可以显著提升有限码长极化码的译码性能,在某些条件下可以逼近极大似然译码的性能。此外,其他译码方法也可以应用于极化码,包括串行抵消堆栈(successive cancellation stack, SCS)算法^[9]、置信度传播(belief propagation, BP)算法^[10]和循环神经网络(recurrent neural network, RNN)算法^[11]等。

2.2 信道极化

信道极化是极化码最核心理论基础。信道极化是指通过递归编码的方法,将原本相互独立的 N 条二进制输入的 B-DMC 信道转化为一组具有相关性且可靠性各异的极化子信道的过程。该过程主要包括信道联合和信道分裂两个阶段:在信道联合阶段,利用特定的线性变换将多个独立信道组合为一个复合信道,从而为后续的信道分裂提供输入;在信道分裂阶段,利用极化变换将复合信道分解为多个极化子信道。注意,这些极化子信道会随着码长增加呈现两极分化的特性。

2.2.1 B-DMC 信道模型

给定 B-DMC 信道 $W: X \rightarrow Y$, 其中 X 表示信道输入信号的集合, Y 表示信道输出符号的集合, $W(y|x)$ 表示信道转移概率, 且 $x \in X$, $y \in Y$ 。对于 B-DMC 信道, 通常输入信号的集合为 $X = \{0, 1\}$ 且为等概率分布。因此, $W: X \rightarrow Y$ 的信道互信息为

$$I(W) = \sum_{x,y} W(xy) \log \frac{W(y|x)}{W(y)} \quad (2-1)$$

其中, $\log$ 底数为 2。因为输入等概率分布, 因此上面公式可进一步表示为

$$I(W) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} \frac{1}{2} W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{\frac{1}{2} W(y|0) + \frac{1}{2} W(y|1)} \quad (2-2)$$

相应的信道巴塔恰里亚(Bhattacharyya)参数(简称巴氏参数)用 $Z(W)$ 表示, 定义如下:

$$Z(W) = \sum_{y \in Y} \sqrt{W(y|0)W(y|1)} \quad (2-3)$$

当给定接收符号 y 时, 对 x 进行 ML 判决:

$$\hat{x}_{\text{ML}} = \arg \max_{x \in \mathcal{X}} W(y|x) \quad (2-4)$$

所以，信道 W 在 ML 判决规则下的错误概率为

$$P_e^{\text{ML}}(W) = \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathcal{Y}} \min(W(y|0), W(y|1)) \quad (2-5)$$

若式(2-2)采取以 2 为底的对数：当 $Z(W)$ 为 0 时， $I(W)$ 为 1；反之，当 $Z(W)$ 为 1 时， $I(W)$ 为 0。此外，可证

$$\begin{cases} P_e^{\text{ML}}(W) \leq Z(W) \\ I(W) \leq \sqrt{1 - Z(W)^2} \end{cases} \quad (2-6)$$

即 $Z(W)$ 是 $P_e^{\text{ML}}(W)$ 的上界。当无法计算 $P_e^{\text{ML}}(W)$ 具体值时， $Z(W)$ 可粗略表示信道 W 的可靠性。信道容量 $I(W)$ 则表示在信道 W 中能够无差错传输所允许的最大传输速率。

2.2.2 极化理论

图 2-1 给出两信道极化变换的基础极化码模块。

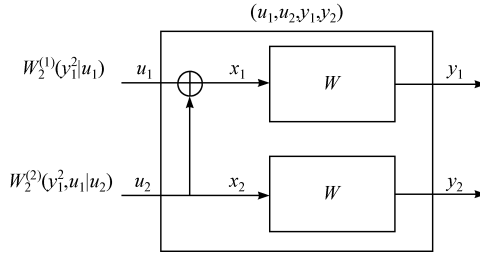


图 2-1 两信道极化变换的基础极化码模块

首先给定 B-DMC 信道 $W: X \rightarrow Y$ ，经过两次信道极化变换 $(u_1, u_2) \rightarrow (u_1 \oplus u_2, u_2) = (x_1, x_2)$ ，得到复合信道 $W^2: X^2 \rightarrow Y^2$ ，其分解后的两个极化子信道分别为 $W_2^{(1)}: X \rightarrow Y^2$ 与 $W_2^{(2)}: X \rightarrow Y^2 \times X$ 。

复合信道 W^2 的转移概率为

$$W(y_1, y_2 | u_1, u_2) = \frac{P(u_2)P(y_2 | u_2)P(u_1 | y_1 u_2)P(y_1 | y_2 u_2 u_1)}{P(u_1)P(u_2)} \quad (2-7)$$

将 u_1 、 u_2 对应的随机变量记为 U_1 、 U_2 ， y_1 、 y_2 对应的随机变量记为 Y_1 、 Y_2 ，由于 U_1 U_2 相互独立， Y_1 Y_2 相互独立，且 U_1 和 Y_2 相互独立，因此有 $P(u_1 | y_1 u_2) = P(u_1)$ ， $P(y_1 | y_2 u_2 u_1) = P(y_1 | u_2 u_1)$ 。由此可得

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2 | u_1, u_2) &= W(y_2 | u_2) W(y_1 | u_2 u_1) \\
&= W(y_2 | u_2) W(y_1 | u_2 \oplus u_1) \\
&= W(y_2 | u_2) W(y_1 | x_1)
\end{aligned} \tag{2-8}$$

极化子信道 $W_2^{(1)}$ 的信道转移概率为

$$\begin{aligned}
W_2^{(1)}(y_1, y_2 | u_1) &= \frac{\sum_{u_2} P(y_1, y_2, u_1, u_2)}{P(u_1)} \\
&= \frac{\sum_{u_2} P(u_1) P(u_2) W(y_1, y_2 | u_1, u_2)}{P(u_1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{u_2} W(y_1, y_2 | u_1, u_2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{u_2} W(y_2 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2)
\end{aligned} \tag{2-9}$$

极化子信道 $W_2^{(2)}$ 的信道转移概率为

$$\begin{aligned}
W_2^{(2)}(y_1, y_2, u_1 | u_2) &= \frac{P(y_1, y_2, u_1, u_2)}{P(u_2)} \\
&= \frac{1}{2} W(y_1, y_2 | u_1, u_2) \\
&= \frac{1}{2} W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2)
\end{aligned} \tag{2-10}$$

利用互信息链式法则，可得

$$I(Y_1 Y_2; U_1 U_2) = I(U_1; Y_1 Y_2) + I(U_2; Y_1 Y_2 | U_1) \tag{2-11}$$

其中， $I(Y_1 Y_2; U_1 U_2)$ 是 $W_2^{(1)}$ 的互信息，由于 $U_1 U_2$ 独立，因此有 $I(Y_1 Y_2 | U_1; U_2) = I(Y_1 Y_2 U_1; U_2)$ ，而 $I(Y_1 Y_2 U_1; U_2)$ 是 $W_2^{(2)}$ 的互信息。经过信道极化后的 $W_2^{(2)}$ 与 $W_2^{(1)}$ 相比，其传递信息的能力更强，即

$$I(Y_1 Y_2; U_1) \leq I(U_2; Y_1 Y_2 U_1) \tag{2-12}$$

根据互信息链式法则，进一步有

$$\begin{aligned}
I(W_2^{(2)}) &= I(U_2; Y_1 Y_2 U_1) \\
&= I(U_2; Y_2) + I(U_2; Y_1 U_1 | Y_2) \\
&= I(W) + I(U_2; Y_1 U_1 | Y_2)
\end{aligned} \tag{2-13}$$

由于 $I(U_2; Y_1 U_1 | Y_2) \geq 0$ ，有 $I(W_2^{(2)}) \geq I(W)$ ；由于 $I(Y_1 Y_2; U_1) + I(Y_1 Y_2 U_1; U_2) = 2I(W)$ ，有 $I(W_2^{(2)}) \geq I(W) \geq I(W_2^{(1)})$ 。即经过信道极化以后， $W_2^{(2)}$ 拥有比 $W_2^{(1)}$ 更大的信道容量，而信道容量的总和仍然不变。

对于两信道极化的变换 $(W, W) \rightarrow (W_2^{(1)}, W_2^{(2)})$ ，其相应的极化子信道巴氏参数同样具有类似规律，表示为

$$Z(W_2^{(2)}) \leq Z(W) \leq Z(W_2^{(1)}) \quad (2-14)$$

给定 $N=2^n$ 信道极化变换，有 $(W_N^{(i)}, W_N^{(i)}) \mapsto (W_{2N}^{(2i-1)}, W_{2N}^{(2i)})$ 。对于信源序列 U_1^N 与接收序列 Y_1^N ，根据互信息链式法则，序列互信息可分解为多个极化子信道的互信息之和，因此满足如下关系：

$$I(U_1^N; Y_1^N) = \sum_{i=1}^N I(U_i; Y_1^N | U_1^{i-1}) = \sum_{i=1}^N I(U_i; Y_1^N U_1^{i-1}) \quad (2-15)$$

其中， $I(U_i; Y_1^N U_1^{i-1})$ 表示第 i 个极化子信道的互信息。根据上面公式，子信道互信息以及巴氏参数满足如下关系：

$$\sum_{i=1}^N I(W_N^{(i)}) = NI(W) \quad (2-16)$$

$$\sum_{i=1}^N Z(W_N^{(i)}) \leq NZ(W) \quad (2-17)$$

由此可见，经过 N 信道极化变换，信道互信息之和保持不变，但由于信道相关性，各个极化子信道的可靠度存在差异。

当 W 是二进制删除信道(binary erasure channel, BEC)时，对于极化变换 $(W_N^{(i)}, W_N^{(i)}) \mapsto (W_{2N}^{(2i-1)}, W_{2N}^{(2i)})$ ，子信道容量和巴氏参数满足如下关系：

$$I(W_{2N}^{(2i-1)}) = I(W_N^{(i)})^2 \quad (2-18)$$

$$I(W_{2N}^{(2i)}) = 2I(W_N^{(i)}) - I(W_N^{(i)})^2 \quad (2-19)$$

$$Z(W_{2N}^{(2i)}) = Z(W_N^{(i)})^2 \quad (2-20)$$

$$Z(W_{2N}^{(2i-1)}) = 2Z(W_N^{(i)}) - Z(W_N^{(i)})^2 \quad (2-21)$$

其中， $I(W_1^{(1)}) = 1 - \varepsilon$ 。当信道删除概率为 $\varepsilon = 0.5$ 时，有 $I(W_1^{(1)}) = 0.5$ 。对于 $n = 1$ ，由式(2-18)和式(2-19)可得